

Introducción a la Teoría de Bifurcaciones

Pablo Aguirre

PRELUDIO

Bifurcación y Caos son dos términos que han dominado la investigación en dinámica no-lineal en las últimas décadas. Su importancia ha traspasado las fronteras de la matemática al marcar presencia desde la física teórica hasta las neurociencias pasando por prácticamente todas las áreas de vanguardia de la ingeniería. La asociación entre bifurcaciones y caos no es gratuita: Muchas veces la ocurrencia de ciertas bifurcaciones puede gatillar la aparición de caos en un sistema. Por lo tanto, el reconocer e identificar las bifurcaciones de un sistema puede ser crucial para entender los mecanismos matemáticos subyacentes que explican una transición entre una dinámica “simple” y un comportamiento caótico.

Estas notas están creadas para servir como acompañamiento en un curso introductorio a la teoría de bifurcaciones distribuidos en 25 sesiones de clases de 70 minutos cada una. Este curso está pensado para estudiantes de doctorado con un interés en el área (amplia) de sistemas dinámicos. Pero también puede ser tomado por estudiantes avanzados de pregrado y aquellos iniciando una maestría en matemáticas. En este texto se pone énfasis en enseñar las técnicas, métodos y fundamentos de la teoría que sustenta el análisis de bifurcaciones en sistemas dinámicos en la forma de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y mapeos. En concreto, el estudiante será capaz de tomar un sistema dinámico específico y describir los cambios cualitativos de la dinámica a medida que se varían los parámetros del sistema, identificando las transiciones críticas y la aparición de caos.

Para este curso son necesarios conocimientos sólidos de sistemas dinámicos y teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, además de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, análisis real y nociones generales de topología.

La mayor parte de este texto no corresponde a una obra original, sino a una recopilación de extractos de diversas fuentes. La principal fuente es el ya clásico libro de Yu. Kuznetsov [23]. La elaboración particular de cada capítulo individual ha sido completada con los siguientes textos:

- Capítulo 1: [6, 13, 17, 18, 23, 25].

- Capítulo 2: [6, 13, 17, 23, 25].
- Capítulo 3: [6, 13, 17, 18, 23, 25].
- Capítulo 4: [6, 17, 18, 23].
- Capítulo 5: [12, 17, 23, 25].
- Capítulo 6: [13, 17, 18, 23, 25].
- Capítulo 7: [3, 17, 23, 25, 29].

Una lista más amplia de textos sugeridos se puede hallar en la Bibliografía al final de estos apuntes. En este listado (a todas luces incompleto) el lector podrá hallar algunos de los trabajos pioneros que ayudaron a construir la teoría tal como hoy la entendemos [3, 4, 9, 12, 15, 24, 30, 31, 35] además de referencias a la obra de Shilnikov en bifurcaciones globales [2]; también textos sobre la teoría general de sistemas dinámicos y que incluyen capítulos dedicados a bifurcaciones [6, 11, 14, 25, 27, 28]; los fundamentos de la relación entre bifurcaciones globales y caos [17, 20, 21, 26, 29]; la conexión con teoría de catástrofe [5, 16]; y variadas aplicaciones de la teoría de bifurcaciones en otras ciencias y disciplinas [1, 7, 19, 22, 33, 34].

El texto que tienen en sus manos ha sido revisado y complementado gracias a los certeros aportes, observaciones y sugerencias de los estudiantes del curso. Cualquier error u omisión que perdurare, será corregido para la siguiente versión del ramo.

pablo aguirre

DMAT — UTFSM, MMXXIII.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Conceptos preliminares | 5 |
| 1.1. ¿Para qué estudiar bifurcaciones? | 5 |
| 1.2. Bifurcaciones locales vs bifurcaciones globales | 7 |
| 1.3. Diagramas de bifurcación y codimensión | 11 |
| 1.4. Equivalencia topológica | 15 |
| 1.5. Desdoblamientos versales | 16 |
| 1.6. Estabilidad estructural | 19 |
| 1.6.1. Sistemas estructuralmente estables en \mathbb{R}^2 | 25 |
| 1.6.2. Estabilidad estructural y codimensión | 26 |
| 1.6.3. Sistemas de Morse-Smale | 28 |
| 2. Formas normales | 31 |
| 2.1. Forma normal de Poincaré | 31 |
| 2.2. Formas normales topológicas de bifurcaciones | 44 |
| 3. Bifurcaciones locales de codimensión uno en sistemas dinámicos continuos | 46 |
| 3.1. Bifurcación fold o silla-nodo | 47 |
| 3.1.1. Forma normal topológica de la bifurcación fold | 51 |
| 3.1.2. Bifurcaciones fold degeneradas | 54 |
| 3.2. Bifurcación de Hopf | 55 |
| 3.2.1. Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf | 63 |
| 4. Bifurcaciones locales de codimensión uno en sistemas dinámicos discretos | 72 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 4.1. | Bifurcación fold | 76 |
| 4.2. | Bifurcación flip | 80 |
| 4.3. | Bifurcación Neimark-Sacker | 86 |
| 5. | Bifurcaciones de equilibrios y órbitas periódicas en sistemas n-dimensionales | 92 |
| 5.1. | Variedades centrales en sistemas a tiempo continuo | 92 |
| 5.2. | Inclusión de direcciones inestables | 102 |
| 5.3. | Variedades centrales en sistemas dinámicos parámetro-dependientes | 104 |
| 5.4. | Variedades centrales en bifurcaciones de sistemas n -dimensionales | 109 |
| 5.5. | Bifurcaciones de ciclos límite | 114 |
| 5.5.1. | Bifurcación silla-nodo de ciclos | 115 |
| 5.5.2. | Bifurcación period-doubling de ciclos | 116 |
| 5.5.3. | Bifurcación Neimark-Sacker de ciclos | 117 |
| 6. | Bifurcaciones locales de codimensión dos | 119 |
| 6.1. | Puntos de codimensión dos | 121 |
| 6.1.1. | Bifurcación cúspide | 124 |
| 6.1.2. | Bifurcación de Hopf generalizada o Bautin | 127 |
| 6.1.3. | Bifurcación Bogdanov-Takens | 131 |
| 7. | Bifurcaciones globales en campos vectoriales | 139 |
| 7.1. | Bifurcaciones globales y transversalidad | 141 |
| 7.2. | Bifurcaciones homoclínicas planares | 146 |
| 7.3. | Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 | 157 |
| 7.3.1. | Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 — Caso silla | 159 |
| 7.3.2. | Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 — Caso silla-foco | 166 |

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1.1. ¿Para qué estudiar bifurcaciones?

Un ejemplo introductorio. Considere el oscilador armónico con fricción. Físicamente, este sistema puede interpretarse como una masa unida a un resorte, el cual está sujeto a una pared, y cuya energía es disipada por el roce con el suelo. La segunda ley de Newton nos dice que el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de reposo viene dado por la EDO de 2do orden:

$$\ddot{x} - c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = cy - \omega^2 x. \end{cases}$$

Éste es un sistema lineal y por lo tanto no es difícil hallar una solución explícita. Sin embargo, dado que se trata de un sistema físico, también podemos dar una descripción intuitiva del comportamiento de las soluciones como en la figura 1.1. Si $c = 0$, en la figura 1.1(b), no se considera roce con el suelo y el sistema conserva la energía. La dinámica resultante corresponde a un movimiento oscilatorio perfectamente sinusoidal. El origen en el plano (x, y) es un *centro*, un equilibrio estable en sentido Lyapunov (pero no es asintóticamente estable) rodeado de un continuo de órbitas periódicas. Si $c < 0$, en la figura 1.1(a), el sistema masa-resorte pierde energía debido al roce, por lo tanto la amplitud de las oscilaciones decrece hasta converger al estado de reposo en el origen, el cual es un equilibrio

atractor. Por último, si $c > 0$ —caso físicamente improbable—, en la figura 1.1(c), la amplitud de las oscilaciones crece y el origen es un repulsor.

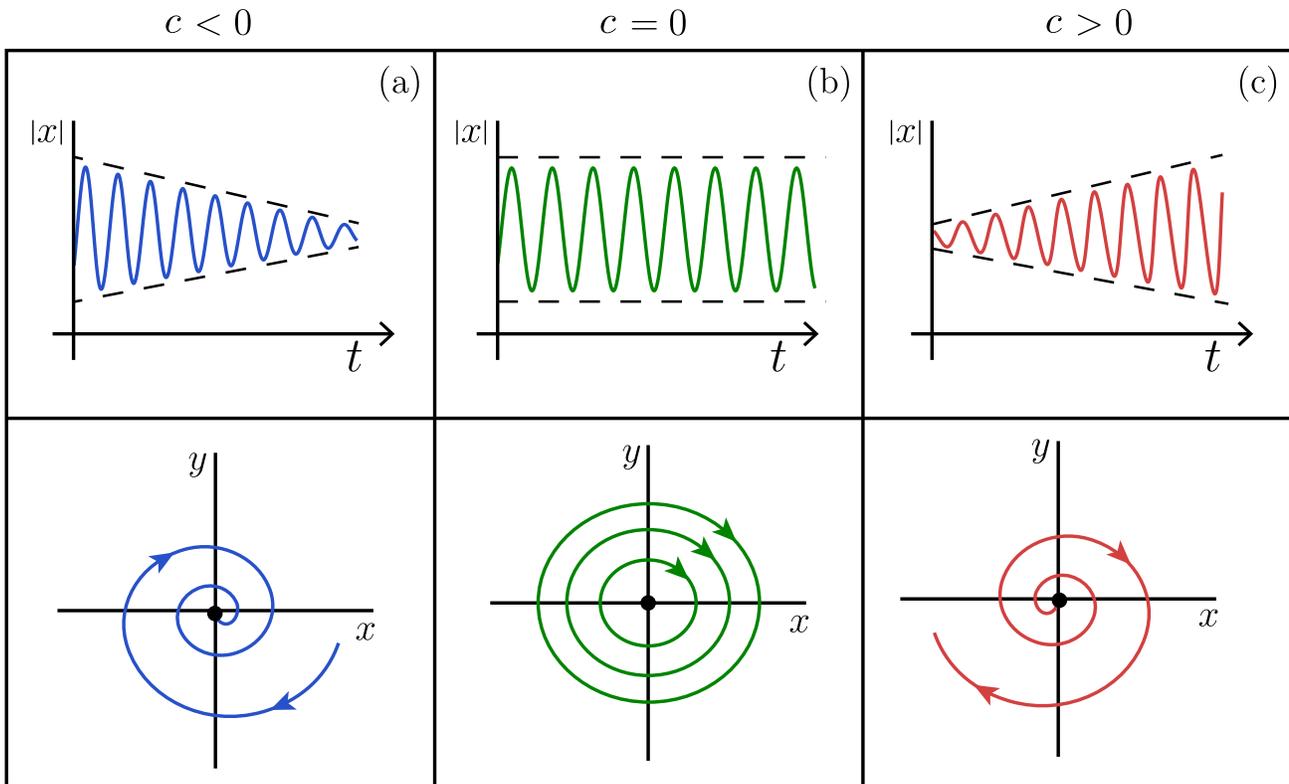


Figura 1.1: Diferentes retratos de fase del oscilador armónico dependiendo del signo de c .

En conclusión, la dinámica del sistema cambia drásticamente al variar el parámetro c cuando $c \approx 0$. Decimos que $c = 0$ es un **valor de bifurcación**, pues la dinámica para todo $c < 0$ suficientemente pequeño es cualitativamente distinta que para todo $c > 0$ suficientemente pequeño.

En este ejemplo, fuimos capaces de deducir propiedades de estabilidad de los equilibrios fácilmente. En general, sin embargo, debemos recurrir a alguna teoría que nos diga qué consecuencias puede tener el mover un parámetro para la estructura topológica de las órbitas de un sistema dinámico. Esto es de especial interés pues típicamente uno no conoce los valores exactos de los parámetros de un modelo. No sabemos exactamente el valor del coeficiente de fricción para el péndulo

planar amortiguado, pero hay uno; no sabemos exactamente el efecto inhibitor de una especie sobre otra, pero parece haber uno; etcetera. Por lo tanto, el modelo es típicamente de la forma general

$$\dot{x} = f(x; \alpha),$$

en el caso de un sistema dinámico continuo, o bien

$$x \mapsto f(x; \alpha),$$

en el caso de un sistema dinámico a tiempo discreto, donde $x \in \mathbb{R}^n$ son variables de estado y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. Puede que solo se sepa que el valor del parámetro α se halla en un cierto intervalo o región. Sin conocer exactamente α , ¿qué se puede decir sobre el sistema si variamos el parámetro α ? Hay dos posibilidades:

1. El sistema permanece topológicamente equivalente al original.
2. El sistema **no** es topológicamente equivalente al original.

Definición 1 *La aparición de un retrato de fase topológicamente no-equivalente bajo variación de parámetros se dice una **bifurcación**.*

Es decir, una bifurcación es un cambio del tipo topológico del sistema a medida que sus parámetros pasan por un valor de bifurcación.

El objetivo de estos apuntes (y del curso que lo acompaña) es presentar una clasificación y métodos para el análisis de bifurcaciones, y las consecuencias de la ocurrencia de estos eventos para la dinámica de un sistema dado.

1.2. Bifurcaciones locales vs bifurcaciones globales

Ejemplo 1 (Bifurcación de Andronov-Hopf)

Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. En coordenadas polares se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Notemos que este último sistema se puede integrar explícitamente. Pero dado que las ecuaciones para ρ y θ son independientes, podemos dibujar fácilmente los retratos de fase en una vecindad del origen.

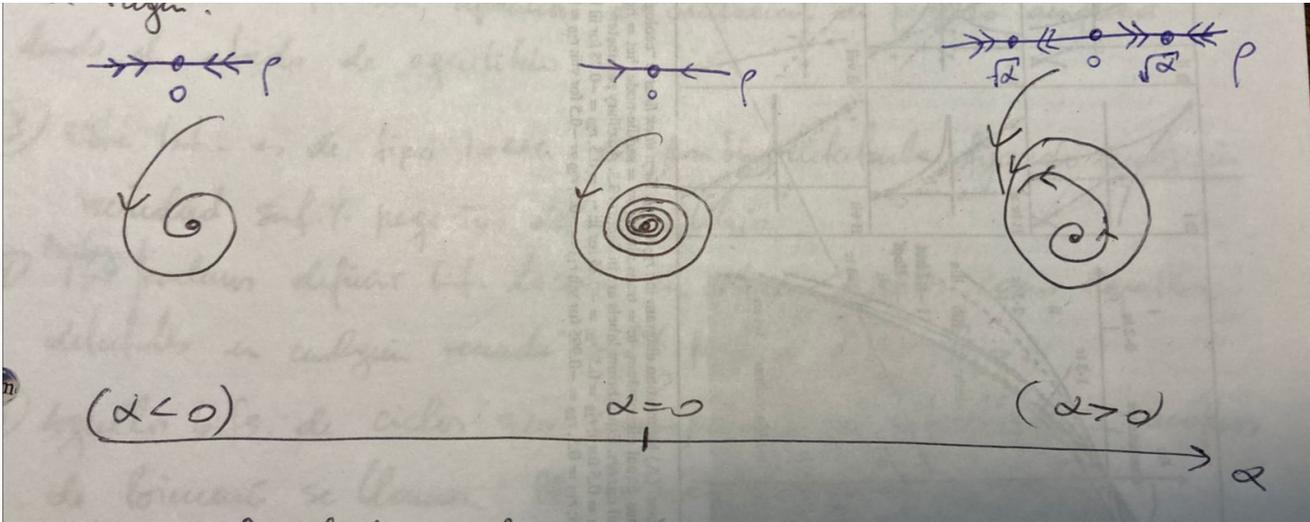


Figura 1.2: Retratos de fase cerca de una bifurcación de Andronov-Hopf.

Para $\alpha \leq 0$, el origen es un foco atractor, pues $\dot{\rho} < 0$ y luego $\rho(t) \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, si $\alpha > 0$, se tiene $\dot{\rho} > 0$ para ρ suficientemente pequeño (luego, decimos que el origen es un foco inestable); pero si ρ es suficientemente grande, $\dot{\rho} < 0$. Es fácil ver de la ecuación para ρ que el sistema tiene una órbita periódica para todo $\alpha > 0$ de radio $\rho_0 = \sqrt{\alpha}$ y que esta órbita es estable. Por lo tanto, $\alpha^* = 0$ es un valor de bifurcación. ¿La razón? Un espacio de fase con un ciclo límite (caso $\alpha > 0$) no se puede deformar homeomórficamente a otro espacio de fase con solo un punto de equilibrio y sin órbitas periódicas (caso $\alpha \leq 0$). Uno se refiere al ciclo límite como un *invariante topológico*, un objeto o característica que debe preservarse bajo homeomorfismos.

Decimos que en este ejemplo ocurre una **Bifurcación de Andronov-Hopf** a medida que α cruza el valor $\alpha^* = 0$; este fenómeno se caracteriza por la aparición

de oscilaciones de pequeña amplitud desde el estado de equilibrio.

Esta bifurcación es de tipo **local**. Es decir, es posible detectarla fijando cualquier vecindad suficientemente pequeña del equilibrio.

OBSERVACIONES:

1. Podemos definir bifurcaciones locales en sistemas discretos de manera análoga, es decir, como aquellas detectables en cualquier vecindad suficientemente pequeña de puntos fijos.
2. Aquellas bifurcaciones de ciclos que correspondan a bifurcaciones locales en mapeos de retorno de Poincaré se llaman bifurcaciones locales de órbitas periódicas.
3. También existen bifurcaciones que no se pueden detectar con solo estudiar un sistema en vecindades pequeñas de equilibrios, puntos fijos o ciclos. Tales bifurcaciones se dicen **globales**. El siguiente es un ejemplo de una bifurcación global.

Ejemplo 2 (Bifurcación heteroclínica)

Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + \alpha(1 - x_1^2), \end{cases}$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Este sistema posee dos puntos de equilibrio de tipo silla: $P_1 = (-1, 0)$ y $P_2 = (1, 0)$.

Cuando $\alpha = 0$, el eje horizontal x_1 es invariante. Esto implica que los puntos silla están conectados por una órbita que es asintótica a una de ellas para $t \rightarrow \infty$, y a la otra para $t \rightarrow -\infty$. Esta órbita se llama **heteroclínica**. (Similarmente, una órbita que es asintótica al mismo punto de equilibrio para $t \rightarrow \pm\infty$ se llama **homoclínica**.)

Sin embargo, para $\alpha \neq 0$, el eje x_1 ya no es invariante y la conexión desaparece; ver figura 1.3. Esta es claramente una bifurcación global: Para detectarla debemos estudiar una región que cubra ambos puntos de equilibrio silla.

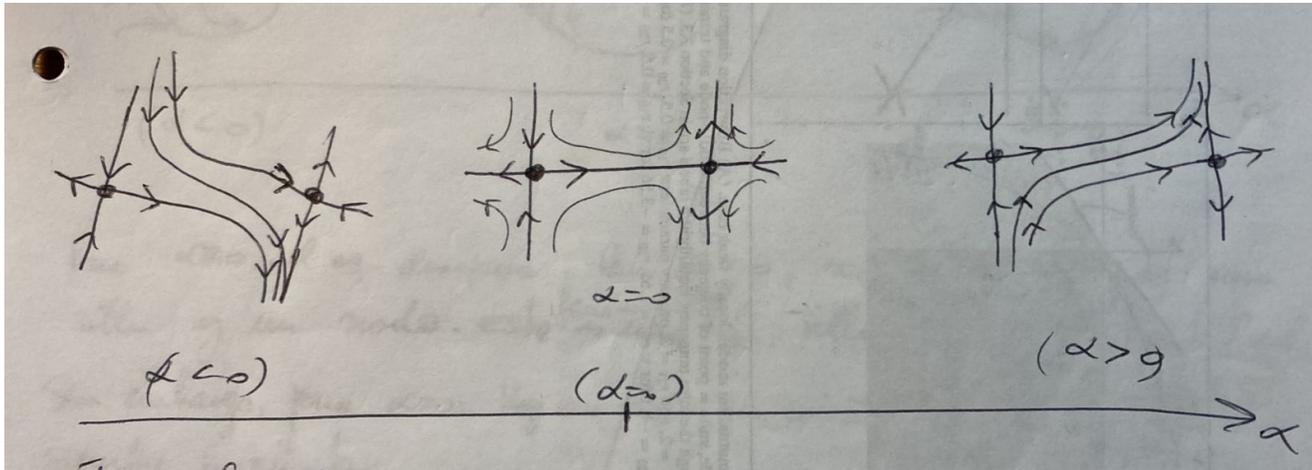


Figura 1.3: Retratos de fase cerca de una bifurcación heteroclínica.

También existen fenómenos que involucran bifurcaciones locales y globales simultáneamente como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 (Bifurcación homoclínica silla-nodo)

Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + \alpha + x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + \alpha + x_1) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2), \end{cases}$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. En coordenadas polares se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1 + \alpha + \rho \cos \theta. \end{cases}$$

De aquí es inmediato concluir que el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{(\rho, \theta) : \rho = 1\}$ es invariante. Consideremos un anillo delgado U alrededor de \mathbb{S}^1 . Para $\alpha = 0$ existe un equilibrio $x_0 = (\rho_0, \theta_0) = (1, \pi)$ con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ (Tarea: verificar esta afirmación). Para $\alpha > 0$, el equilibrio desaparece, mientras que para $\alpha < 0$, x_0 se “divide” en dos equilibrios: una silla y un nodo. Este fenómeno es un evento local y se conoce como una **bifurcación silla-nodo**. Sin embargo, para $\alpha > 0$ existe un ciclo que coincide con \mathbb{S}^1 . Como \mathbb{S}^1 es invariante para todo α , entonces para $\alpha = 0$ también hay una conexión homoclínica al equilibrio x_0 . Por lo tanto, lo que está ocurriendo en $\alpha = 0$ se llama una **bifurcación homoclínica silla-nodo**.

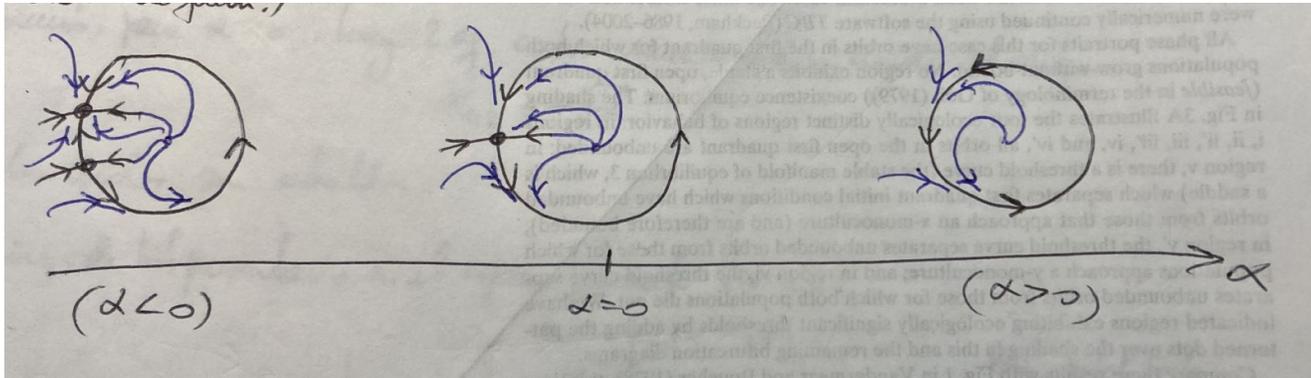


Figura 1.4: Retratos de fase cerca de una bifurcación homoclínica silla-nodo.

1.3. Diagramas de bifurcación y codimensión

En los tres ejemplos anteriores, el valor de bifurcación $\alpha = \alpha^*$ define una *separación* o transición entre los retratos de fase topológicamente diferentes. Existe una vecindad de α^* tal que para todo $\alpha < \alpha^*$ en esta vecindad, los retratos de fase son topológicamente equivalentes entre sí; mientras que para todo $\alpha > \alpha^*$ en esta vecindad, los retratos de fase son topológicamente equivalentes entre sí. Pero los retratos de fase para $\alpha < \alpha^*$ y $\alpha > \alpha^*$ no son topológicamente equivalentes.

Definición 2 *Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, junto con retratos de fase representativos para cada estrato.*

Ejemplo 4 Considere el campo de vectores $\dot{x} = \alpha x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Este sistema posee un equilibrio en $x_0 = 0$ para todo α . Como $f'(0) = \alpha$, entonces x_0 es estable para $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. Además, para $\alpha > 0$ hay otros dos equilibrios que se ramifican desde el origen en $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha}$, los cuales son ambos estables. Este fenómeno se conoce como **bifurcación pitchfork**. El diagrama de bifurcación en el espacio producto (α, x) se muestra en la figura 1.5.

Notemos que este sistema posee una simetría pues es invariante bajo la transformación $x \mapsto -x$. Estudiaremos algunas bifurcaciones en sistemas que poseen ciertas simetrías más adelante.

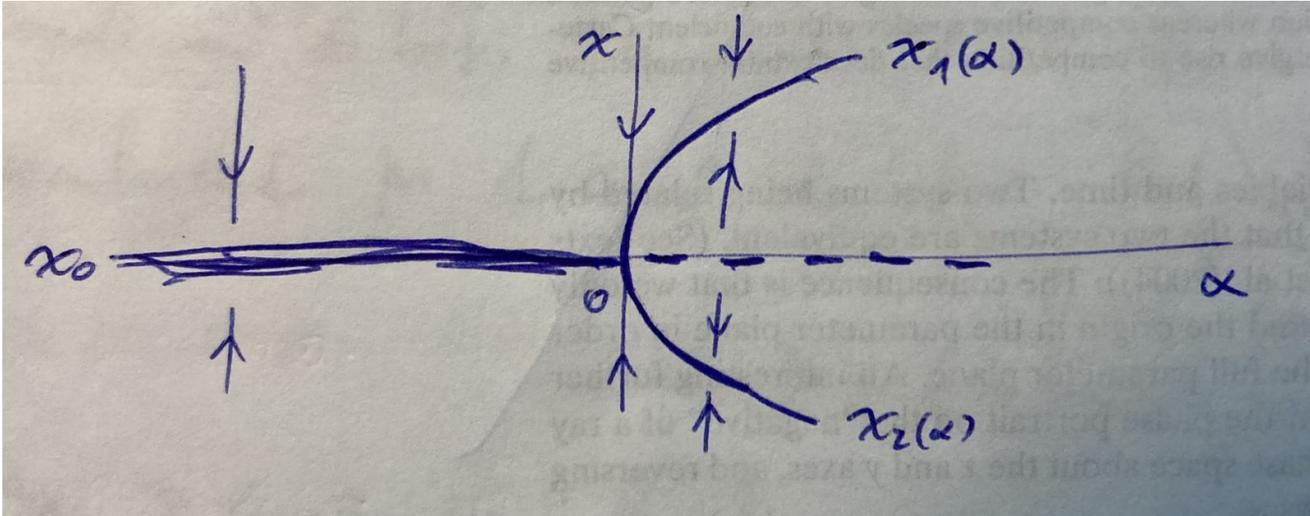


Figura 1.5: Diagrama de bifurcación de una bifurcación pitchfork.

En los casos más simples, si el espacio de parámetros de un sistema es \mathbb{R}^m , los diagramas de bifurcación se componen de un número finito de regiones de \mathbb{R}^m . Dentro de cada región los retratos de fase resultantes son topológicamente equivalentes entre sí. Cada región abierta es separada por **fronteras de bifurcación** (que corresponden a subvariedades suaves de \mathbb{R}^m). Estas fronteras se pueden intersectar o unir. Estas intersecciones subdividen las fronteras en subregiones y así sucesivamente. Una frontera de bifurcación queda especificada por un objeto (un punto de equilibrio, un ciclo, etc) —el cual está “pasando por la bifurcación— y alguna condición (típicamente algebraica) que determina de cuál bifurcación se trata (Hopf, silla-nodo, pitchfork, etc).

Ejemplo 5 Considere el diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros \mathbb{R}^m , con $m = 3$, como en la figura 1.6 asociado a las bifurcaciones de un punto de equilibrio de un sistema en \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Aún cuando los valores propios $\lambda_{1,2,3}$ de este equilibrio dependen de los parámetros $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, obviaremos esta dependencia para simplificar la notación. El espacio tridimensional está dividido por dos fronteras de bifurcación correspondientes a una superficie de bifurcación silla-nodo (LP) y una superficie de bifurcación de Hopf (H), respectivamente. La superficie H está definida por la condición de bifurcación (condición algebraica) $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ impuesta sobre los valores propios de un punto de equilibrio. Es

decir,

$$H = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0\}.$$

Por otro lado, la superficie LP corresponde a

$$LP = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_3 = 0\}.$$

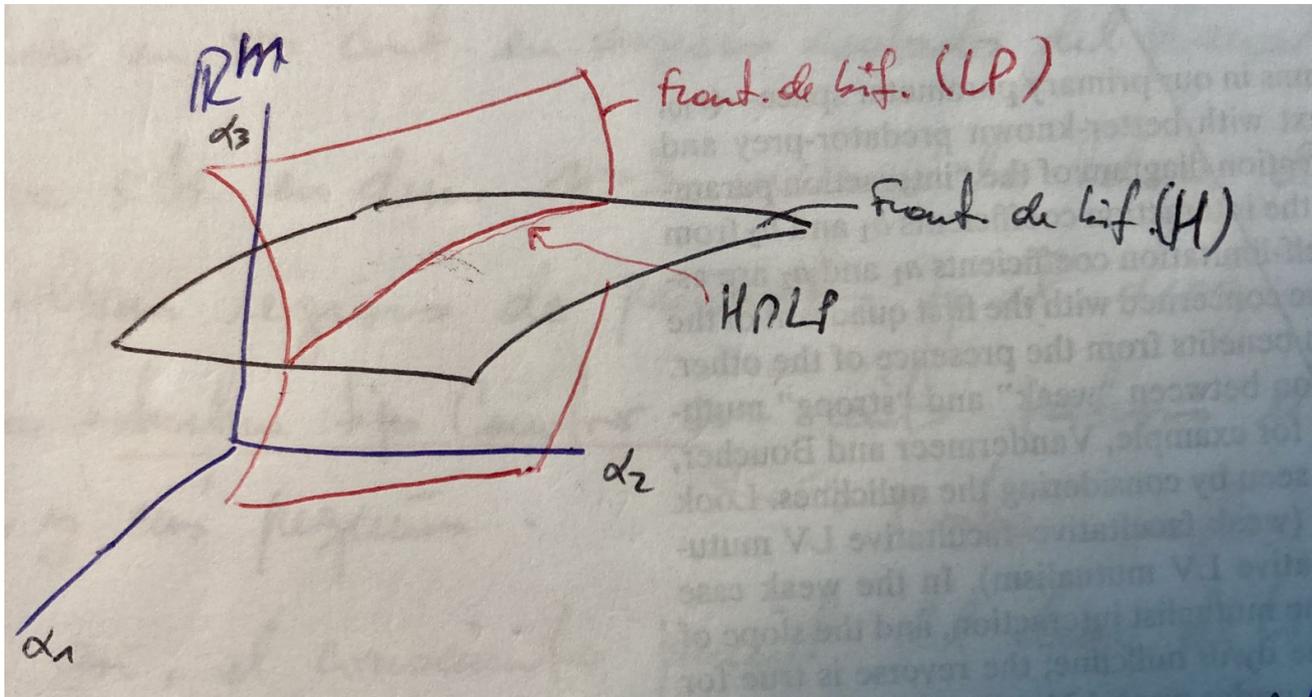


Figura 1.6: Diagrama de bifurcación de una bifurcación pitchfork.

Cada vez que el punto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ cruza una de estas fronteras, ocurre la bifurcación correspondiente en el sistema.

Si adoptamos un lenguaje de variedades, notemos que tanto H como LP son dos subvariedades de dimensión 2 en un espacio de dimensión 3, es decir poseen *codimensión* 1. Ambas superficies se intersectan a lo largo de la curva

$$H \cap LP = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0, \lambda_3 = 0\},$$

la cual es una subvariedad de dimensión 1, es decir, de *codimensión* 2, que determina la ocurrencia simultánea de una bifurcación de Hopf y una bifurcación

silla-nodo en un mismo punto de equilibrio (fenómeno también conocido como *bifurcación zero-Hopf*). De esta manera, tanto H como LP quedan divididas en dos subfronteras a lo largo de la curva $H \cap LP$.

Definición 3 *Una bifurcación es de **codimensión** k si el conjunto de bifurcación queda determinado por k condiciones independientes sobre los parámetros.*

En base al ejemplo 5, la codimensión puede entenderse equivalentemente como:

- i) La diferencia entre la dimensión del espacio de parámetros m y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación.
- ii) El número mínimo de parámetros que es necesario “mover” para hallar una bifurcación en el espacio de parámetros. En la figura 1.6 es necesario variar al menos un parámetro —dejando los demás fijos— para cruzar la superficie H (o LP); en cambio, se requiere mover al menos dos parámetros para cruzar la frontera $H \cap LP$ desde una ubicación arbitraria en el espacio $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

En general, el número mínimo de parámetros libres que se necesitan para encontrar una bifurcación de codimensión k es exactamente k . Por ejemplo, para satisfacer una única condición de bifurcación necesitamos mover un único parámetro del sistema. Si hay dos condiciones, debemos variar dos parámetros, etc. En otras palabras, debemos controlar k parámetros para alcanzar una frontera de bifurcación de codimensión k .

OBSERVACIONES:

1. Un diagrama de bifurcación se puede componer de un número infinito de estratos o fronteras (incluso en sistemas dinámicos continuos definidos en regiones acotadas del plano).
2. Para sistemas en dimensión $n > 3$ incluso los valores de bifurcación podrían acumularse densamente en algunas regiones del espacio de parámetros y el diagrama de bifurcación podría tener una estructura tipo Cantor con ciertos patrones repitiéndose en escalas más y más pequeñas. Aún así, el conocimiento parcial del diagrama de bifurcación nos da información importante sobre el comportamiento de un sistema.

1.4. Equivalencia topológica

A pesar de la complejidad que pueden llegar a tener algunos diagramas de bifurcación, afortunadamente las bifurcaciones “interactúan” entre sí siguiendo ciertas *reglas*. Eso hace que los diagramas de bifurcación que aparecen en muchas aplicaciones se vean similares. Por ello, necesitamos un criterio para decidir cuándo dos sistemas dinámicos parámetro-dependientes tienen diagramas de bifurcación equivalentes.

Definición 4 *Consideremos dos familias de sistemas dependientes de parámetros:*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (1.2)$$

donde f y g son suaves. La familia (1.1) se dice **topológicamente equivalente** a la familia (1.2) si se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Existe un homeomorfismo del espacio de parámetros

$$p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \beta = p(\alpha);$$

2. Existe un homeomorfismo (parámetro-dependiente) del espacio de fase

$$h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y = h_\alpha(x),$$

que mapea órbitas de (1.1) —en los valores de parámetro α — en órbitas de (1.2) —en valores de parámetro $\beta = p(\alpha)$ —, preservando la dirección del tiempo.

OBSERVACIONES:

1. El homeomorfismo p transforma el diagrama de bifurcación de (1.1) en el de (1.2).
2. El homeomorfismo h_α mapea los correspondientes retratos de fase.

3. Por definición dos sistemas parámetro-dependientes topológicamente equivalentes poseen diagramas de bifurcación topológicamente equivalentes.

4. No es necesario que h_α dependa continuamente de α . En tal caso, la transformación

$$(x, \alpha) \mapsto (h_{p(\alpha)}(x), p(\alpha))$$

sería un homeomorfismo en el espacio producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

5. Los sistemas (1.1) y (1.2) se dicen **localmente topológicamente equivalentes** cerca de (x_0, α^*) si la definición anterior se cumple en una pequeña vecindad de $\alpha = \alpha^*$ con $p(\alpha^*) = \beta^*$ y tal que h_α mapea órbitas de (1.1) en una vecindad U_α de x_0 en órbitas de (1.2) en $h_\alpha(U_\alpha)$ con $h_\alpha(x_0) = y_0$.

La noción de equivalencia topológica refuerza la idea que para estudiar una bifurcación de codimensión k basta hacerlo en sistemas genéricos con k parámetros. En efecto, si se tiene un sistema m -paramétrico con $m > k$, el diagrama topológicamente equivalente cerca de la frontera de bifurcación se puede obtener al “mover” el diagrama k -paramétrico en las direcciones complementarias.

Ejemplo 6 Como ya vimos la bifurcación de Hopf es una bifurcación de codimensión $k = 1$. Si $m = 1$, ocurre en valores de parámetros aislados. Si $m = 2$, generalmente ocurre en curvas específicas (subvariedades unidimensionales) en el espacio de parámetros. Si cruzamos esta curva transversalmente (i.e., en un ángulo no nulo), los diagramas de bifurcación resultantes serán topológicamente equivalentes al diagrama de bifurcación original uniparamétrico. Lo mismo es verdad si cruzamos transversalmente una superficie bidimensional correspondiente a la bifurcación de Hopf en un sistema con $m = 3$ como en el ejemplo 5.

1.5. Desdoblamientos versales

Con estas nociones podemos considerar el problema de clasificar todos los posibles diagramas de bifurcación de sistemas genéricos y que dependan de la menor cantidad de parámetros necesarios. La teoría comienza con un campo de vectores particular, digamos $f_0(x)$. Para estudiar la dependencia de la dinámica

con respecto a los parámetros, este campo de vectores es *desplegado* o *desdoblado* (del inglés *unfolded*):

Definición 5 Una familia de campos de vectores $f(x, \mu)$ que depende de un vector de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^m$ es un **desdoblamiento** (o **deformación**) de $f_0(x)$ si $f(x, 0) = f_0(x)$.

Un desdoblamiento $f(x, \mu)$ puede entenderse como una perturbación parámetro-dependiente del sistema original $f_0(x)$. En lo que sigue nos enfocamos en una vecindad de un valor de bifurcación del parámetro el que, sin pérdida de generalidad, asumimos que es $\mu = 0$. Típicamente, asumiremos que el campo $f_0(x)$ posee una órbita degenerada en este valor del parámetro (por ejemplo, un equilibrio no hiperbólico); esto se llama una condición de *singularidad*. En todos los capítulos siguientes, excepto el último, nos restringiremos a bifurcaciones que son locales en el espacio de fase.

Por el momento, tampoco nos ocuparemos de cuál es el espacio de funciones que consideramos en un desdoblamiento ni de la definición rigurosa de la vecindad particular de f_0 . Diremos un poco sobre esto más adelante en la sección 1.6 y algo más a medida que tratemos con bifurcaciones específicas a partir del capítulo 3.

Aunque dos sistemas dinámicos equivalentes dependan de los mismos parámetros, es posible que algunos de estos aparezcan en uno de los sistemas en una manera trivial.

Ejemplo 7 Los campos de vectores $f(x; \mu_1, \mu_2) = \mu_1 + x^2$ y $g(x; \mu_1, \mu_2) = \mu_1/\mu_2 + \mu_2 y^2$ son conjugados —y por ende, topológicamente equivalentes— bajo la transformación $y = h(x; \mu_1, \mu_2) = x/\mu_2$ siempre que $\mu_2 \neq 0$. (Usando la notación de la definición 4, p es la identidad.) Luego, aunque f dependa formalmente de ambos parámetros, en realidad solo depende del primero. En otras palabras, el diagrama de bifurcación de g depende esencialmente de solo 1 parámetro y no de ambos.

Este ejemplo ilustra uno de los principales mecanismos para reducir un sistemas de EDOs a una llamada *forma normal* que contenga un número minimal de parámetros. Por tanto, es útil tener una noción de equivalencia que permita una reparametrización de los campos de vectores y que produzcan una reducción en el número de parámetros “activos” en una bifurcación.

Definición 6 Una familia $\dot{y} = g(y, \beta)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, se dice **inducida** por la familia $\dot{x} = f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, si existe un mapeo continuo $\alpha = p(\beta)$, tal que $g(y, \beta) = f(y, p(\beta))$.

En esta definición, p es una reparametrización actuando sobre el parámetro β de g para transformar a este último en f . Luego, dos familias poseen la misma dinámica si una es inducida por un campo de vectores topológicamente equivalente a la segunda.

Ejemplo 8 El campo de vectores $g(x, \nu) = \nu_1 + \nu_2 - x^2$ con dos parámetros en \mathbb{R} es inducido por $f(x, \mu_1) = \mu_1 - x^2$ usando la reparametrización $\mu_1 = p(\nu) = \nu_1 + \nu_2^2$. Aunque g depende de dos parámetros, solo uno es esencial. Luego, f es una versión algebraicamente más simple de g .

Por otro lado, el campo de vectores $k(x, \lambda) = \lambda_1 + 2\lambda_2 x - x^2$ no es inducido por f ; más bien lo contrario — f es inducido por k a través del mapeo $\lambda = p(\mu_1) = (\mu_1, 0)$. En este sentido, f parece ser una versión “incompleta” de k .

Sin embargo, el campo k es conjugado a g usando la traslación $y = h(x, \lambda) = x - \lambda_2$, pues $g(y, \lambda) = k(y + \lambda_2, \lambda) = \lambda_1 + \lambda_2^2 - y^2$. Dado que g es inducido por f , podemos afirmar que el flujo de k es conjugado a un flujo inducido por f . Por lo tanto, f describe la dinámica de las dos familias a dos parámetros g y k .

En el ejemplo anterior, los campos f, g y k son todos desdoblamientos del campo singular $f_0(x) = -x^2$, pero la familia f era la más simple de ellas y presenta la misma dinámica que g y k . Sin embargo, también podríamos considerar otros desdoblamientos de f_0 más generales, por ejemplo de la forma $\tilde{f}(x, \alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 x + (\alpha_3 - 1)x^2 + O(x^3)$. De *todos los posibles* desdoblamientos de un sistema, buscamos uno que logre capturar *todas* las posibles dinámicas no equivalentes que pueden aparecer al perturbar el sistema singular.

Definición 7 Una familia de deformaciones $f(x; \mu)$ de f_0 se dice un **desdoblamiento versal** si cualquier otro desdoblamiento en alguna vecindad de f_0 es localmente topológicamente equivalente a una familia inducida por $f(x, \mu)$.

El término *versal* es una manera informal de decir *universal*. Denota el hecho que la familia versal $f(x; \mu)$ “despliega” o “desdobla” (del inglés *unfolds*) todos

los posibles retratos de fase no-equivalentes de sistemas vecinos a f_0 al mover apropiadamente μ en una vecindad de $\mu = 0$; luego, el diagrama de bifurcación resultante es “universal” para la bifurcación en cuestión.

Ejemplo 9 Supongamos que $x \in \mathbb{R}$ y que $f_0 = 0$. Consideremos el comportamiento del equilibrio no hiperbólico en $x_0 = 0$ (aún cuando todos los puntos en \mathbb{R} son equilibrios!). La familia $f(x, \mu) = -\mu_1 x + \mu_2 x^2$ es un desdoblamiento de f_0 , y siempre tiene un equilibrio en $x_0 = 0$ para todo valor de $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Sin embargo, la familia f no es versal porque, por ejemplo, el campo de vectores $g(x, \nu) = \nu$ también es un desdoblamiento de f_0 y no tiene equilibrios cuando $\nu \neq 0$ y, luego, no puede ser equivalente a f .

Aún cuando f no es versal, el desdoblamiento f en algún sentido posee demasiados parámetros. En efecto, la conjugación $y = h(x) = \mu_2 x$ transforma f en el campo $k(y, \mu) = -\mu_1 y + y^2$, así que basta una familia uniparamétrica para describir la dinámica de f cuando $\mu_2 \neq 0$.

1.6. Estabilidad estructural

Existen sistemas dinámicos cuyo retrato de fase (en algún dominio) no cambia cualitativamente bajo perturbaciones suficientemente pequeñas; estos son los sistemas *estructuralmente estables*. Por tanto, nos interesa estudiar cuándo la propiedad de equivalencia topológica se preserva (o se rompe) en una vecindad de un sistema en particular al mover un parámetro. La noción de estabilidad estructural también nos permite dar un marco formal para los resultados que se desarrollan a lo largo de la teoría de bifurcaciones; por ejemplo, dado un desdoblamiento o familia $f(x, \mu)$, nos ayuda a establecer en qué regiones del espacio de parámetros los retratos de fase respectivos son equivalentes. Esta misma noción también da pie a estudiar qué propiedades pueden ser genéricas en un sistema dinámico, i.e., dadas ciertas condiciones, cuáles son las características o ingredientes dinámicos típicos que uno puede esperar que muestre un sistema dinámico (y cuáles no lo son!).

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

donde f es suave, y supongamos que f posee un equilibrio hiperbólico en x_0 , $f(x_0) = 0$. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$ pequeño y consideremos una perturbación dada por:

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

con g suave; aquí, ϵ podría ser positivo o negativo. Por la dependencia suave de las soluciones con respecto a los parámetros, es claro que si $\epsilon \rightarrow 0$ en (1.4), uno recupera el sistema original (1.3).

Busquemos equilibrios de (1.4). La expresión

$$F(x, \epsilon) = f(x) + \epsilon g(x) = 0$$

define una ecuación para puntos de equilibrio de (1.4) con $F(x_0, 0) = 0$. Por otro lado, también tenemos que la matriz Jacobiana

$$F_x(x_0, 0) = Df(x_0) =: A_0$$

es invertible, pues x_0 es hiperbólico. Luego, por el teorema de la función implícita, existe una función suave $x = x(\epsilon)$, con $x(0) = x_0$ tal que $F(x(\epsilon), \epsilon) = 0$, para todo $|\epsilon|$ pequeño. Es decir, localmente es posible definir una familia de equilibrios de (1.4), parametrizada por ϵ , que contiene a x_0 . ¿Cuál es la estabilidad de $x(\epsilon)$?

La matriz Jacobiana de (1.4) en $x(\epsilon)$ es

$$A_\epsilon := (Df(x) + \epsilon Dg(x))|_{x=x(\epsilon)},$$

la cual varía en forma suave con ϵ y coincide con A_0 en $\epsilon = 0$. Por otro lado, los valores propios de una matriz que depende suavemente de un parámetro cambian continuamente con la variación de este parámetro (la variación es suave si los valores propios permanecen simples). Por lo tanto, $x(\epsilon)$ no tendrá valores propios en el eje imaginario para ningún $|\epsilon|$ suficientemente pequeño. Luego, $x(\epsilon)$ es un equilibrio hiperbólico para todo $|\epsilon|$ suficientemente pequeño. Además, los números n_+ y n_- de valores propios inestables y estables de A_ϵ no cambian debido a la continuidad. En resumen, los sistemas (1.3) y (1.4) son localmente topológicamente equivalentes cerca de los equilibrios. De hecho, para todo $|\epsilon|$ pequeño, existe una vecindad $U_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ del equilibrio $x(\epsilon)$ en la cual (1.4) es topológicamente equivalente a (1.3) en U_0 .

En estas condiciones, decimos que el equilibrio hiperbólico x_0 de (1.3) *persiste* bajo pequeñas perturbaciones suaves de la forma (1.4). Mediante argumentos similares, se tiene que el siguiente resultado.

Teorema 1 *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es suave, y supongamos que f posee un equilibrio hiperbólico en x_0 , $f(x_0) = 0$. Entonces para todo $|\epsilon|$ suficientemente pequeño, en un sistema suave de la forma

$$\dot{x} = G(x, \epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \epsilon \in \mathbb{R},$$

donde $G(x, 0) = f(x)$, existe un equilibrio $x(\epsilon)$ con $x(0) = x_0$ tal que el retrato de fase local en una vecindad de $x(\epsilon)$ será cualitativamente equivalente al de una vecindad de x_0 .

Como consecuencia, al perturbar un sistema cerca de un equilibrio hiperbólico, éste persiste: sus coordenadas pueden variar un poco pero su estabilidad local se preserva. Este resultado también nos dice que, localmente, la cantidad de equilibrios hiperbólicos no puede cambiar ante pequeñas perturbaciones del parámetro ni tampoco pueden aparecer órbitas periódicas infinitesimales.

A continuación veremos qué otras características genéricas debería cumplir un sistema para que la propiedad de equivalencia topológica se preserve al mover un parámetro (...y qué esperar si estas condiciones no se cumplen!). Nuestro problema ahora se enmarca en un espacio normado de campos de vectores.

Definición 8 *Consideremos los dos sistemas*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

con f y g suaves. Definimos la **distancia** entre (1.5) y (1.6) en una región cerrada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\|f - g\| = \sup_{x \in \Omega} \{|f(x) - g(x)| + |Df(x) - Dg(x)|\}.$$

Decimos que los sistemas (1.5) y (1.6) son ϵ -**cercanos** en Ω si $\|f - g\| < \epsilon$. Aquí, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ es la norma Euclidea, y $|A|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$ es la norma considerada para matrices.

OBSERVACIONES:

1. Con esta definición, dos sistemas son cercanos si los lados derechos de las ecuaciones son cercanos y *además* sus primeras derivadas parciales son cercanas. Luego, con esta métrica, uno dice que los sistemas son C^1 -cercanos.
2. La distancia entre (1.5) y (1.6) es proporcional a $|\epsilon|$. De hecho, se tiene $\|f - g\| = C|\epsilon|$, para alguna constante $C > 0$.
3. La definición anterior también se puede aplicar a sistemas discretos.
4. ¿Qué pasa si no se consideran las primeras derivadas en la definición anterior? En la figura siguiente se ven las gráficas esquemáticas de dos sistemas unidimensionales de la forma (1.5) y (1.6) con $n = 1$. El sistema (1.5) posee un solo equilibrio, pero el sistema (1.6) tiene cinco. Si consideramos solo la norma C^0 , esto es, $\sup_{x \in \Omega} \{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon$, entonces f y g son ϵ -cercanos. Sin embargo, tienen un número diferente de puntos de equilibrio en cualquier vecindad del equilibrio de (1.5) y claramente no son topológicamente equivalentes.

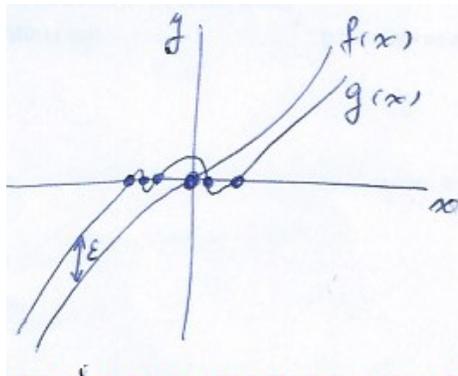


Figura 1.7: Al considerar la distancia C^0 , f y g son ϵ -cercanos. Sin embargo, no son topológicamente equivalentes pues tienen una cantidad distinta de puntos de equilibrio. Al tomar la distancia C^1 los sistemas f y g claramente ya no son ϵ -cercanos.

Definición 9 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Un campo de vectores f suave en \mathbb{R}^n se dice **estructuralmente estable** si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo campo g suave que sea ϵ -cercano a f , se tiene que f y g son topológicamente equivalentes en Ω . Es decir, existe un homeomorfismo $\phi : \Omega \rightarrow \Omega$ que lleva órbitas de f en órbitas de g y preserva su orientación en el tiempo. Si un campo f no es estructuralmente estable, se dice que f es **estructuralmente inestable**.

Ejemplo 10 En la figura 1.8 vemos dos sistemas estructuralmente estables (lado izquierdo) y dos estructuralmente inestables (lado derecho). En estos últimos casos, una pequeña perturbación puede provocar que el equilibrio (resp. el ciclo límite) en la frontera de Ω se mueva hacia el interior o el exterior de Ω modificando la cantidad de conjuntos invariantes del sistema en Ω .

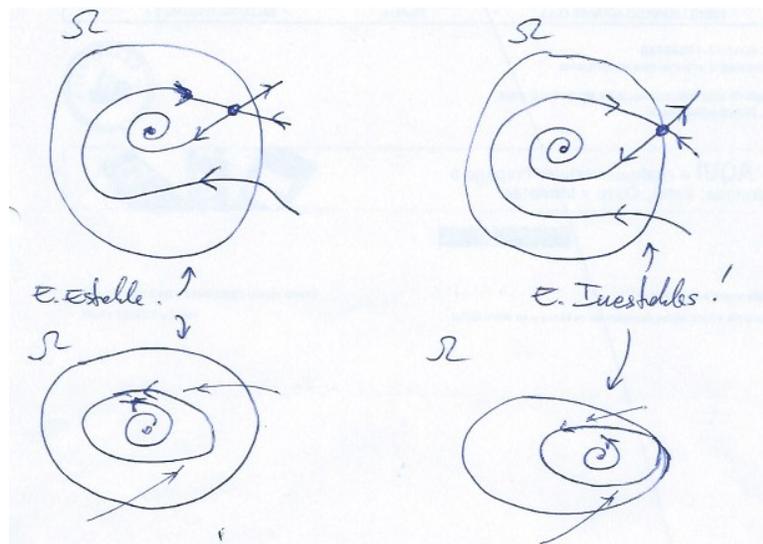


Figura 1.8: Ejemplos esquemáticos de sistemas estructuralmente estables e inestable en el plano.

Ejemplo 11 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Este sistema no es estructuralmente estable en ningún compacto

$K \subset \mathbb{R}^2$ que contenga al origen. Veamos por qué. Sea

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con $|\mu|$ pequeño. Luego, dado que K es compacto,

$$\|f - g\| = \max_K \left\{ \mu \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| + \mu \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \right\} = |\mu| \left(\max_K |(x, y)| + 1 \right).$$

Sea $d = \text{diam}(K)$, esto es, $d = \max_K \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right|$ es la mayor distancia entre dos puntos de K . Si escogemos $|\mu| = \frac{\epsilon}{d+2}$, con $\epsilon > 0$, se tiene:

$$\|f - g\| < |\mu|(d+1) \leq \frac{\epsilon}{d+2}(d+1) < \epsilon.$$

Por lo tanto, f y g son ϵ -cercanos. Sin embargo, por otro lado, los posibles retratos de fase de g son como en la figura 1.9.

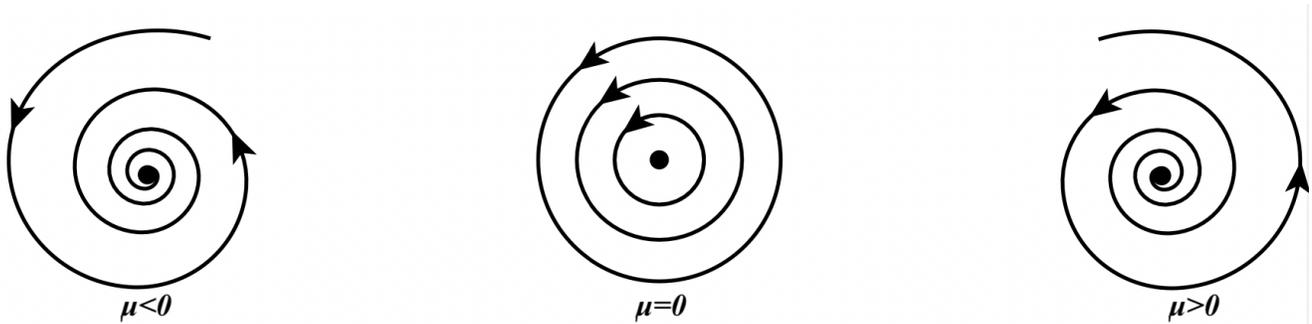


Figura 1.9: Retratos de fase representativos —para $\mu < 0$ y $\mu > 0$, respectivamente— de perturbaciones ϵ -cercanas a un centro lineal ($\mu = 0$), el cual es estructuralmente inestable.

Claramente, f no es topológicamente equivalente a g para $\mu \neq 0$. Por lo tanto, f no es estructuralmente estable. En este caso, $\mu = 0$ es un valor de bifurcación para g .

Ejemplo 12 Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu y + x - x^3, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Los retratos de fase posibles son los de la figura 1.10 para $|\mu|$ suficientemente pequeño.

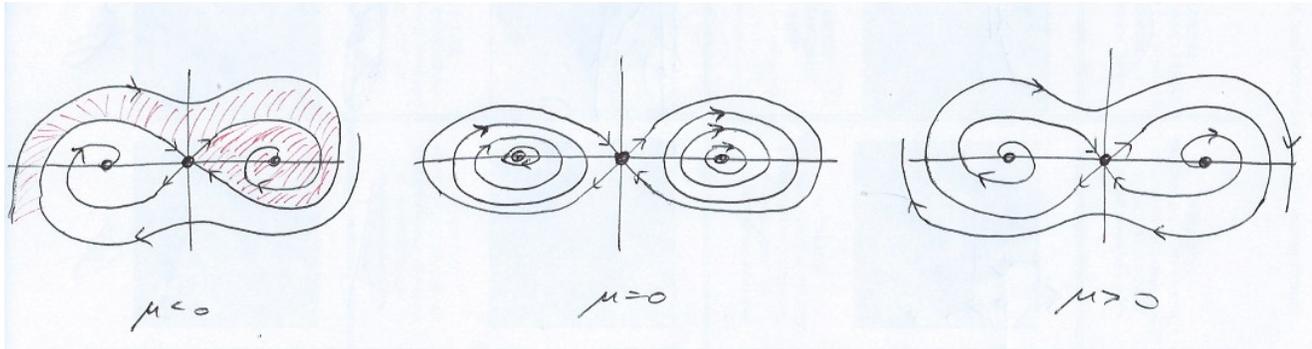


Figura 1.10: Retratos de fase representativos —para $\mu < 0$ y $\mu > 0$, respectivamente— de perturbaciones ϵ -cercanas a un sistema conservativo ($\mu = 0$), el cual es estructuralmente inestable.

Si $\mu < 0$, el sistema posee dos focos estables hiperbólicos y un punto silla hiperbólico. Estos focos se vuelven inestables si $\mu > 0$. La transición ocurre en $\mu = 0$ en que el sistema es conservativo, con cantidad conservada dada por

$$E(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Luego, las órbitas del sistema con $\mu = 0$ están contenidas en las curvas de nivel de E . En particular, hay dos centros rodeados por familias de órbitas periódicas —una cantidad infinita. Además, las variedades estable e inestable del punto silla se intersectan a lo largo de dos conexiones homoclínicas. Cada una de estas intersecciones es no-transversal, pues ocurre a lo largo de *toda* la conexión. Por el contrario, si $\mu \neq 0$, vemos que estas conexiones se rompen. No solo el comportamiento cualitativo cerca de los puntos de equilibrio $(\pm 1, 0)$ cambia a medida que μ varía desde cero, sino que tampoco hay conexiones entre puntos silla para $\mu \neq 0$, es decir, no persisten bajo pequeñas perturbaciones. En definitiva, el sistema con $\mu = 0$ es estructuralmente inestable.

1.6.1. Sistemas estructuralmente estables en \mathbb{R}^2

En el caso planar podemos caracterizar completamente qué propiedades debe tener un sistema dinámico estructuralmente estable.

Teorema 2 (*Andronov & Pontryagin, 1937*) *Un sistema dinámico suave $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, es estructuralmente estable en una región $D \subset \mathbb{R}^2$ si y solo si*

1. *El campo posee una cantidad finita de puntos de equilibrio y ciclos límite en D , y todos son hiperbólicos.*
2. *No existen conexiones homoclínicas ni heteroclínicas.*

COMENTARIOS:

1. Este teorema nos da una descripción completa de los sistemas estructuralmente estables en el plano. También existe una generalización probada por Peixoto (1962) para sistemas definidos en variedades compactas de dimensión dos.
2. En el espacio de sistemas planares de clase C^r sobre la región $D \subset \mathbb{R}^2$, aquellos campos que son estructuralmente estables forman un conjunto abierto y denso. Es decir, un sistema típico (i.e., genérico) en el plano satisface las condiciones de Andronov & Pontryagin. Por lo tanto, si un flujo contiene, por ejemplo, un equilibrio no hiperbólico, entonces una pequeña perturbación basta para volverlo hiperbólico; similarmente, un equilibrio hiperbólico permanece hiperbólico bajo cualquier perturbación suficientemente pequeña.
3. El teorema anterior implica que típicamente un campo de vectores bidimensional puede tener solamente equilibrios atractores, repulsores, sillas, y órbitas cerradas estables e inestables en su conjunto invariante. En efecto, el teorema de Poincaré-Bendixson implica que no pueden haber conjuntos límite distintos a equilibrios, órbitas cerradas y órbitas homo/heteroclínicas, y éstas últimas están descartadas por las hipótesis de Andronov & Pontryagin.

1.6.2. Estabilidad estructural y codimensión

Si uno considera el diagrama de bifurcación de un sistema planar genérico dependiendo de k parámetros, éste define una familia

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^k,$$

de sistemas estructuralmente estables en las regiones abiertas k -dimensionales cuyas fronteras estén formadas por conjuntos de bifurcación. Por ejemplo, considere el diagrama de la figura 1.11. La variedad \mathcal{B} es una frontera de bifurcación (de codimensión 1 en el espacio k -dimensional) y la familia $\dot{x} = f(x, \alpha)$ define sistemas estructuralmente estables en los abiertos A_1 y A_2 . Cualquier sistema en \mathbb{R}^2 que no satisfaga al menos una de las características del teorema anterior es estructuralmente inestable. En particular, tal sistema se encuentra en alguna frontera de bifurcación en el espacio de parámetros, por ejemplo la variedad \mathcal{B} .

Sin embargo, si *restringimos* la familia a \mathcal{B} y consideramos la topología inducida en \mathcal{B} , entonces el sistema (restringido) también será estructuralmente estable en conjuntos abiertos de \mathcal{B} (i.e., de codimensión 1 en \mathbb{R}^k) delimitados por subvariedades que definan bifurcaciones de codimensión 2 o mayor. Justamente, la codimensión de la subvariedad nos indica la codimensión de la bifurcación respectiva, es decir, el número de condiciones algebraicas independientes que definen esa variedad.

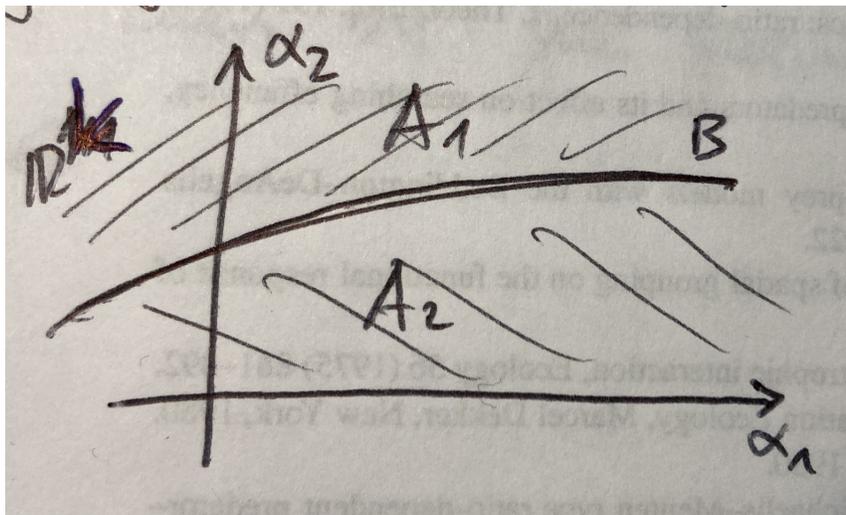


Figura 1.11: Representación esquemática de un espacio de parámetros subdividido por una frontera de bifurcación de codimensión uno. La familia $\dot{x} = f(x, \alpha)$ define sistemas estructuralmente estables en los abiertos A_1 y A_2 .

Aún cuando este ejemplo está planteado para sistemas planares, las conclusiones análogas en espacios de estado de dimensión arbitraria siguen siendo válidas. En atención a esta última observación es posible dar la siguiente definición equi-

valente de codimensión.

Definición 10 *Una bifurcación posee **codimensión** m si ocurre en forma estructuralmente estable en sistemas genéricos a m parámetros.*

1.6.3. Sistemas de Morse-Smale

El teorema anterior, en general, no es válido en el caso n -dimensional, $n \geq 3$. Ni siquiera es válido en sistemas bidimensionales cuyo espacio de fase no sea \mathbb{R}^2 . Aún así, podemos decir al menos qué propiedades uno debería esperar para que un sistema sea candidato a ser estructuralmente estable. Por ejemplo, el siguiente teorema es una formalización del resultado demostrado al inicio de este capítulo, a saber, nos dice que en el caso general n -dimensional, bajo pequeñas perturbaciones, un equilibrio hiperbólico varía sus coordenadas en forma continua y su estabilidad se preserva.

Teorema 3 *Sea f un campo de vectores suave en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con un punto de equilibrio hiperbólico x_0 . Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo campo de vectores g , δ -cercano a f , existe y_0 en una vecindad de x_0 , $y \in N_\epsilon(x_0)$, de tamaño ϵ , tal que y_0 es un equilibrio hiperbólico de g . Además, $Df(x_0)$ y $Dg(y_0)$ tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa y positiva, respectivamente.*

Asímimo, dado que el teorema anterior también es cierto en el caso discreto, podemos enunciar una versión análoga para el caso de órbitas periódicas de campos de vectores.

Teorema 4 *Sea f un campo de vectores suave en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una órbita periódica hiperbólica Γ . Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo campo de vectores g , δ -cercano a f , existe una órbita periódica Γ' de g contenida en una ϵ -vecindad tubular de Γ . Más aún, las variedades estable $W^s(\Gamma)$ y $W^s(\Gamma')$ y las inestables $W^u(\Gamma)$ y $W^u(\Gamma')$ tienen las mismas dimensiones.*

Para entender qué propiedades son características en un sistema estructuralmente estable en el caso n -dimensional, recordemos la noción de punto no-errante.

Definición 11 Un punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice un **punto no-errante** del flujo Φ^t definido por el campo de vectores $\dot{x} = f(x)$, si para toda vecindad U de x y para todo $T > 0$, existe $t > T$ tal que

$$\Phi^t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

El **conjunto no-errante** del flujo Φ^t consiste de todos los puntos no-errantes en Ω .

En esta definición, un punto no-errante es aquel cuya órbita constantemente se acerca al mismo punto, pudiendo alejarse de él, pero regresando eventualmente una y otra vez.

Ejemplo 13 Los puntos de equilibrio y puntos en órbitas periódicas son no-errantes.

Ejemplo 14 Sea S el cuadrado unitario con lados opuestos identificados formando un toro \mathbb{T}^2 , y sean (x, y) coordenadas en S , las cuales están identificadas módulo 1. El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_1, \\ \dot{y} &= \omega_2,\end{aligned}$$

con $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^2$, define el flujo en el toro \mathbb{T}^2

$$\Phi^t(x_0, y_0) = (\omega_1 t + x_0, \omega_2 t + y_0)^t.$$

No es difícil ver que si ω_1/ω_2 es racional, entonces todos los puntos en S están en órbitas periódicas. Por otro lado, si ω_1/ω_2 es irracional, todos los puntos en S están en órbitas que nunca se cierran, pero que cubren densamente a \mathbb{T}^2 . Ambos casos claramente no son topológicamente equivalentes entre sí. En ambos casos, todos los puntos de \mathbb{T}^2 son no-errantes. Además, en *ambos* casos, el sistema es estructuralmente inestable pues cualquier pequeña perturbación $\epsilon \neq 0$ en la razón $\frac{\omega_1 + \epsilon}{\omega_2}$ cambia el caso racional en irracional o viceversa. Luego, en ambos casos, tenemos un sistema bidimensional (pero no definido en \mathbb{R}^2) estructuralmente inestable cuyo conjunto no-errante se compone de todo el espacio de fase \mathbb{T}^2 .

Los ejemplos anteriores nos sugieren ciertas propiedades deseadas que uno intuitivamente esperaría en un sistema genérico.

Definición 12 *Un sistema de Morse-Smale es uno para el cual:*

1. *El número de puntos de equilibrio y órbitas periódicas es finito y cada uno es hiperbólico.*
2. *Todas las variedades estables e inestables que se intersecten lo hacen transversalmente.*
3. *Los conjuntos no-errantes consisten únicamente de puntos de equilibrio y órbitas periódicas.*

Se puede demostrar que los sistemas de Morse-Smale restringidos a dominios n -dimensionales compactos son estructuralmente estables. Sin embargo, el recíproco no es cierto. De hecho, existen sistemas (muchos de ellos provenientes de modelos aplicados concretos) que **no** satisfacen estas condiciones de Morse-Smale y que, aún así, son estructuralmente estables. El mismo Smale construyó un famoso contraejemplo: un sistema estructuralmente estable con un conjunto no-errante que contiene un conjunto invariante caótico (i.e., no es ni un punto de equilibrio ni una órbita periódica) y un número infinito de órbitas periódicas en una región compacta: La herradura de Smale. Efectivamente, una pequeña perturbación C^1 -cercana del mapeo puede deformar la herradura, pero el conjunto hiperbólico invariante persiste. Más adelante estudiaremos bifurcaciones que generan herraduras de Smale en secciones transversales de Poincaré.

Capítulo 2

Formas normales

Para bifurcaciones locales de equilibrios y puntos fijos, podemos hallar diagramas de bifurcación universales gracias a las *formas normales topológicas*. Esta es una de las nociones centrales en la teoría de bifurcaciones pues nos permite reducir el análisis de una bifurcación local de codimensión k al de alguna familia topológicamente equivalente con exactamente k parámetros y que solo contenga aquellos términos algebraicos relevantes para la bifurcación de interés.

2.1. Forma normal de Poincaré

Para simplificar la exposición consideremos primeramente un sistema de EDOs que no depende de parámetros

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

donde f es suave y posee un punto de equilibrio en $x_0 = 0$. (Si $x_0 \neq 0$, siempre podemos llevar el punto x_0 al origen mediante una traslación.) Nuestro objetivo es hallar un cambio de coordenadas

$$x = h(y) \tag{2.2}$$

con $h(0) = 0$ tal que el sistema (2.1) se vuelva “lo más simple posible” en las nuevas coordenadas y .

Por la regla de la cadena, en las coordenadas y se tiene el sistema equivalente:

$$Dh(y)\dot{y} = f(h(y))$$

o bien,

$$\dot{y} = (Dh(y))^{-1} f(h(y)), \quad (2.3)$$

En el mejor de los casos, el nuevo sistema (2.3) es lineal. Pero en general, no lo será. Repitamos la pregunta: ¿Cómo definir h tal que (2.1) se vuelva “lo más simple posible” en las nuevas coordenadas y ? Notemos que el sistema (2.1) puede ser expandido en serie de potencias alrededor del origen. En tal caso, queremos hallar una secuencia de transformaciones de coordenadas:

$$h_1, h_2, h_3, \dots, h_s, \dots$$

que vayan removiendo progresivamente *la mayor cantidad de términos* de grado $1, 2, 3, \dots, s, \dots$, etc, respectivamente, de la serie de Taylor de (2.1) y que dejen solo aquellos términos esenciales que capturen la dinámica. En otras palabras,

- h_1 remueve los términos “superfluos” de grado 1;
- h_2 remueve los términos “superfluos” de grado 2;
- \vdots
- h_s remueve los términos “superfluos” de grado s ;
- etc.

De esta manera, luego podemos definir el cambio de coordenadas (2.2) como

$$h = h_s \circ h_{s-1} \circ \dots \circ h_2 \circ h_1,$$

la cual elimina los términos superfluos hasta grado s de la expansión en serie de potencias de (2.1) alrededor del origen.

Eliminando términos de grado 1.

El primer paso es separar la parte lineal de (2.1) en $x = 0$ escribiendo

$$\dot{x} = Df(0)x + \bar{f}(x), \quad (2.4)$$

donde $\bar{f}(x) = f(x) - Df(0)x$. Por definición, $\bar{f}(x) = O(|x|^2)$. Para lograr esto, comencemos llevando la matriz $Df(0)$ a su forma diagonal o a su forma canónica de Jordan. Sea T la matriz de vectores propios (generalizados) de $Df(0)$. Luego, aplicando la transformación

$$x = Tv$$

se tiene $\dot{x} = T\dot{v}$, o bien,

$$\dot{v} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}(Df(0)x + \bar{f}(x)),$$

llevando (2.1) en

$$\dot{v} = T^{-1}Df(0)Tv + T^{-1}\bar{f}(Tv).$$

Notemos que $J = T^{-1}Df(0)T$ es la forma canónica (real) de Jordan de $Df(0)$ —o bien, su diagonalización, según corresponda. Si además denotamos $F(v) = T^{-1}\bar{f}(Tv)$ entonces obtenemos

$$\dot{x} = Jx + F(x), \tag{2.5}$$

donde hemos vuelto a usar la letra x para economizar notación. De esta manera hemos simplificado la parte lineal de (2.1) lo máximo posible.

Eliminando términos cuadráticos.

Expandiendo $F(x)$ en (2.5) en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ tenemos:

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_{r-1}(x) + O(|x|^r), \tag{2.6}$$

donde $F_i(x)$ representa los términos de orden i en la expansión.

Consideremos la transformación

$$x = y + h_2(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

donde $h_2(y)$ es un polinomio (vectorial) homogéneo de grado 2, es decir, $h_2(y)$ tiene la forma

$$h_2(y) = (h_2^1(y), \dots, h_2^n(y))^t,$$

donde cada $h_2^i(y)$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Por ejemplo, si $n = 2$, se tiene

$$h_2^1(y_1, y_2) = \alpha_{20}y_1^2 + \alpha_{11}y_1y_2 + \alpha_{02}y_2^2; \quad h_2^2(y_1, y_2) = \beta_{20}y_1^2 + \beta_{11}y_1y_2 + \beta_{02}y_2^2,$$

con coeficientes α_{ij}, β_{ij} por determinar.

Sustituyendo (2.7) en (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} = (I + Dh_2(y)) \dot{y} = & Jy + Jh_2(y) + F_2(y + h_2(y)) + F_3(y + h_2(y)) \\ & + \dots + F_{r-1}(y + h_2(y)) + O(|y|^r), \end{aligned}$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Notemos que cada término

$$F_k(y + h_2(y)) = F_k(y) + O(|y|^{k+1}) + \dots + O(|y|^{2k}), \quad 2 \leq k \leq r-1.$$

Luego, podemos reescribir:

$$(I + Dh_2(y)) \dot{y} = Jy + Jh_2(y) + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) + \dots + \tilde{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r), \quad (2.8)$$

en donde la tilde en \tilde{F}_k denota que los términos de grado k han sido modificados por el cambio de coordenadas. Notemos que el término cuadrático $F_2(y)$ en (2.8) es el mismo que en (2.6).

Ahora bien, se puede probar que para y en una vecindad del origen la matriz $(I + Dh_2(y))$ en (2.8) es invertible (Tarea: comprobar!). Más aún, $(I + Dh_2(y))^{-1}$ puede representarse en una expansión en serie de la forma

$$(I + Dh_2(y))^{-1} = I - Dh_2(y) + O(|y|^2).$$

Sustituyendo esta expresión en (2.8) tenemos

$$\dot{y} = Jy + Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y) + \bar{F}_3(y) + \dots + \bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r), \quad (2.9)$$

el cual corresponde al sistema en las nuevas coordenadas y . Los términos cuadráticos de (2.9) son en definitiva

$$Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y). \quad (2.10)$$

Hasta este punto h_2 en (2.7) ha sido arbitrario. Ahora buscaremos un h_2 específico de tal forma de simplificar al máximo los términos cuadráticos de (2.9). Idealmente

$$Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy = -F_2(y)$$

y se eliminarían todos los términos cuadráticos.

OBSERVACIONES:

1. Si podemos eliminar todos los términos hasta grado $k \geq 2$ mediante una sucesión de transformaciones suaves e invertibles h_i , entonces el campo resultante *se puede linealizar* hasta cualquier orden algebraico. Por ejemplo, esto es lo que ocurre —bajo ciertas condiciones— para un equilibrio hiperbólico. (Note que, en rigor, esto no es equivalente al resultado del teorema de Hartman-Grobman. ¿Por qué?)
2. Sin embargo, en la teoría de bifurcaciones estamos interesados en puntos de equilibrio no-hiperbólicos, es decir, en puntos de equilibrio con algún valor propio con parte real nula. En tal caso, la parte lineal no basta para determinar la dinámica. Es decir, existen términos no lineales de *resonancia* en el campo vectorial que no se pueden eliminar mediante cambios de coordenadas. La forma normal, en tal caso, nos entrega aquellos términos resonantes esenciales.

Con lo anterior en mente, volvemos a la pregunta: ¿Cómo hallar h_2 tal que la expresión (2.10) se simplifique al máximo, es decir, que solo sobrevivan los términos resonantes? Para responder esta pregunta debemos definir ciertos conceptos previos.

Sea H_k el espacio vectorial de campos de vectores en \mathbb{R}^n cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado k . Por ejemplo, si $n = k = 2$ el espacio H_2 posee la base canónica

$$\mathcal{B}_2 = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}.$$

Consideremos el operador lineal en H_k , llamado **operador homológico**, definido por el *Corchete de Lie*:

$$\begin{aligned} [\cdot, L] : H_k &\rightarrow H_k, \\ Y &\mapsto [Y, L] = (DL)Y - (DY)L, \end{aligned}$$

donde $L = Df(0)x$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. El operador homológico (también conocido como **operador de la derivada de Lie**) es una aplicación bilineal en

las dos componentes y se tiene la forma explícita:

$$\left[\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial L^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial L^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial L^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix},$$

o equivalentemente en forma más compacta:

$$[Y, L]^i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L^i}{\partial x_j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} L^j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Supongamos que $Df(0) = J$ está en su forma canónica de Jordan. Luego, $L = Df(0)x = Jx$, y entonces $DL = J$. Por definición, el polinomio $h_2 \in H_2$. Luego,

$$[h_2(y), L] = Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy \in [H_2, L],$$

donde $[H_2, L]$ es la imagen del operador $[\cdot, L]$. Así los términos cuadráticos en (2.10) quedan:

$$[h_2(y), L] + F_2(y) \in H_2. \tag{2.11}$$

Del álgebra lineal se tiene que H_2 puede representarse como

$$H_2 \cong [H_2, L] \oplus G_2,$$

donde G_2 es un subespacio vectorial complementario de $[H_2, L]$ en H_2 .

Caso 1. Si $F_2 \in [H_2, L]$, entonces es posible hallar h_2 tal que

$$[h_2(y), L] = -F_2(y).$$

Es decir, todos los términos cuadráticos se pueden eliminar. (En particular, si $[H_2, L] \cong H_2$ entonces todos los términos cuadráticos se pueden eliminar.)

Caso 2. Si $F_2 \notin [H_2, L]$, denotemos

$$F_2(y) = F_2^S(y) + F_2^R(y),$$

donde $F_2^S \in [H_2, L]$ son los términos “superfluos” y $F_2^R \in G_2$ son los términos resonantes. Por lo tanto podemos escoger h_2 tal que solo aquellos términos de F_2 que están en G_2 sobrevivan en (2.11). Es decir, escogemos h_2 tal que

$$[h_2(y), L] = -F_2^S(y).$$

Luego, la expresión (2.11) se reduce a

$$[h_2(y), L] + F_2^S(y) + F_2^R(y) = F_2^R(y).$$

En tal caso, el sistema (2.9) después del cambio de coordenadas (2.7) queda:

$$\dot{y} = Jy + F_2^R(y) + \bar{F}_3(y) + \dots + \bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r), \quad (2.12)$$

en donde habremos reducido lo más posible los términos cuadráticos.

Eliminando términos cúbicos.

Sea el cambio de coordenadas $y \mapsto y + h_3(y)$, con $h_3(y) \in H_3$, el espacio vectorial de campos de vectores cuyas funciones coordenada son polinomios homogéneos de grado 3. Sustituyendo en (2.12) y después de un poco de álgebra obtenemos

$$\dot{y} = Jy + F_2^R(y) + Jh_3(y) - Dh_3(y)Jy + \bar{F}_3(y) + \hat{F}_4(y) \dots + \hat{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r),$$

donde los términos $\hat{F}_k(y)$, $4 \leq k \leq r-1$, indican que el cambio de coordenadas ha modificado los términos de orden mayor a tres. Los términos cúbicos son ahora

$$Jh_3(y) - Dh_3(y)Jy + \bar{F}_3(y) = [h_3(y), L] + \bar{F}_3(y), \quad (2.13)$$

donde la aplicación lineal $[\cdot, L] : H_3 \rightarrow H_3$ queda ahora definida por el operador homológico en H_3 . Si denotamos su imagen por $[H_3, L]$ entonces

$$H_3 \cong [H_3, L] \oplus G_3,$$

donde G_3 es un subespacio vectorial complementario de $[H_3, L]$ en H_3 . Denotemos

$$\bar{F}_3(y) = F_3^S(y) + F_3^R(y),$$

donde $F_3^S(y) \in [H_3, L]$ y $F_3^R(y) \in G_3$. Luego, los términos cúbicos (2.13) se pueden simplificar al escoger $h_3(y)$ tal que

$$[h_3(y), L] = -\bar{F}_3^S(y).$$

De forma inductiva obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5 (*Forma Normal*) Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema de clase C^r , con $f(0) = 0$ y $Jx = L$, donde J es la forma canónica de Jordan —o la diagonalización, según corresponda— de $Df(0)$. Considere el operador homológico $[\cdot, L] : H_k \rightarrow H_k$ y sea G_k un subespacio vectorial complementario de la imagen $[H_k, L]$ en H_k , es decir, $H_k \cong [H_k, L] \oplus G_k$. Entonces existe un cambio de coordenadas analítico en una vecindad de $x = 0$ que transforma el sistema en

$$\dot{y} = Jy + F_2^R(y) + F_3^3(y) + \dots + F_{r-1}^R(y) + O(|y|^r), \quad (2.14)$$

donde $F_k^R \in G_k$, $2 \leq k \leq r-1$.

Definición 13 Bajo las hipótesis del teorema anterior, decimos que el sistema (2.14) corresponde a una **forma normal** hasta orden $r-1$ de $\dot{x} = f(x)$. Los términos F_k^R , $2 \leq k \leq r-1$, se dicen **términos resonantes**.

OBSERVACIONES:

1. La estructura de los términos no lineales en (2.14) queda enteramente determinada por la parte lineal del campo vectorial a través del operador homológico.
2. Al simplificar términos de orden k , no se afecta ningún otro término de orden menor. Sin embargo, los términos de orden mayor sí se ven modificados. Esto sucede en cada etapa de la aplicación de este método. Por lo tanto, para calcular los coeficientes de cada término de la forma normal en términos del campo original, uno debe hacer un seguimiento de cómo los términos de orden superior van modificándose por los sucesivos cambios de coordenadas.
3. En el mismo espíritu, también es posible enunciar un teorema de la forma normal para puntos fijos de sistemas dinámicos discretos.

Ejemplo 15 Consideremos el siguiente sistema planar

$$X : \begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + TOS, \\ \dot{y} = X_2(x, y) = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + TOS, \end{cases}$$

donde *TOS* denota los *términos de orden superior*. Encontremos una forma normal de grado 2. Claramente $(0, 0)$ es un punto de equilibrio. Además

$$DX(0, 0) = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

está en su forma de Jordan y posee valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i$; luego el origen es un equilibrio no-hiperbólico.

Además,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Luego, definimos el operador homológico $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$, donde H_2 es el espacio vectorial de campos de vectores en \mathbb{R}^2 cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2. Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B}_2 = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}.$$

Dada la linealidad de $[\cdot, L]$ basta buscar las imágenes de los vectores en esta base para determinar la imagen $[H_2, L]$ y su complemento G_2 .

Para facilitar los cálculos es conveniente utilizar la siguiente notación para el campo de vectores:

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Con esta notación, la base \mathcal{B} queda de la forma

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ x^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

Se tiene

$$\left[\begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando las cuentas de manera análoga con el resto de los elementos de la base \mathcal{B}_2 obtenemos el cuadro resumen 2.1.

Sea A la matriz asociada a la transformación lineal $\left[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right]$ en la base \mathcal{B}_2 . Así,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuadro 2.1:

| $\left[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right]$ | x^2 | xy | y^2 |
|---|--|---|--|
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | $2xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ | $(y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$ | $-2xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | $-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}$ | $-xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y}$ | $-y^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}$ |

Luego, $\det(A) \neq 0$ y $\left[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right]$ es un isomorfismo. Por lo tanto,

$$\left[H_2, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] \cong H_2$$

y todos los términos cuadráticos del campo X pueden eliminarse mediante un cambio de coordenadas apropiado. Por lo tanto, la forma normal hasta orden 2 buscada es

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + O(|(u, v)|^3), \\ \dot{v} = u + O(|(u, v)|^3). \end{cases}$$

Ejemplo 16 Consideremos el siguiente sistema planar

$$X : \begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + TOS, \\ \dot{y} = X_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + TOS, \end{cases}$$

donde TOS denota los términos de orden superior. Encontremos una forma normal de grado 2. Claramente $(0, 0)$ es un punto de equilibrio. Además

$$DX(0, 0) = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

está en su forma de Jordan y ambos valores propios son $\lambda_{1,2} = 0$; luego el origen es un equilibrio no-hiperbólico.

Sea

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, definimos el operador homológico $[\cdot, L] : H_2 \rightarrow H_2$, donde H_2 es el espacio vectorial de campos de vectores en \mathbb{R}^2 cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2. Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B}_2 = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}.$$

Dada la linealidad de $[\cdot, L]$ basta buscar las imágenes de los vectores en esta base para determinar la imagen $[H_2, L]$ y su complemento G_2 .

Se tiene

$$\left[\begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x, y) \\ X_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando las cuentas de manera análoga con el resto de los elementos de la base \mathcal{B}_2 obtenemos el cuadro resumen 2.2.

Sea A la matriz asociada a la transformación lineal $\left[\cdot, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ en la base \mathcal{B}_2 .

Así,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuadro 2.2:

| | | | |
|---|---|--|-----------------------------------|
| $\left[\cdot, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right]$ | x^2 | xy | y^2 |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | $-2xy \frac{\partial}{\partial x}$ | $-y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ | 0 |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | $x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}$ | $xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ | $y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ |

Luego, $\det(A) = 0$ y $\left[\cdot, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ no es un isomorfismo. Por lo tanto, el subespacio G_2 no es trivial. La imagen de H_2 por operador homológico está generada por

$$\left[H_2, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left\langle \left\{ -2xy \frac{\partial}{\partial x}, -y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle.$$

Por lo tanto, una base de $\left[H_2, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ es

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

y se tiene

$$\dim \left[H_2, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 4.$$

Luego, $\dim G_2 = 2$, pues $H_2 \cong \left[H_2, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] \oplus G_2$. Por lo tanto una base para G_2 es

$$\left\{ x^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

Por el teorema de la forma normal existe un cambio de coordenadas analítico tal que el sistema original en las nuevas coordenadas tiene la forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \alpha_1 u^2 + O(|(u, v)|^3), \\ \dot{v} = \alpha_2 u^2 + O(|(u, v)|^3). \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. En el ejemplo anterior notemos que la base de $\left[H_2, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ no es única. Luego las formas normales generalmente tampoco son únicas. Por ejemplo, los vectores

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes y son ortogonales a cada columna de la matriz A . Por lo tanto, generan G_2 . Así, la forma normal nos queda:

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \alpha_1 u^2 + O(|(u, v)|^3), \\ \dot{v} = \alpha_2 u^2 + \alpha_3 uv + O(|(u, v)|^3). \end{cases}$$

Otra posibilidad es:

$$\begin{cases} \dot{u} = v + O(|(u, v)|^3), \\ \dot{v} = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + O(|(u, v)|^3). \end{cases}$$

2.2. Formas normales topológicas de bifurcaciones

Considere el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (2.15)$$

con f suficientemente suave en (x, α) . Supongamos que $f(0, 0) = 0$. Nuestro deseo sigue siendo simplificar (2.15) eliminando los términos superfluos que no influyen en la dinámica por medio de cambios de coordenadas (difeomorfismos). En este caso el truco es extender el sistema a uno más grande:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Uno puede calcular una forma normal para (2.16) imponiendo que las transformaciones de coordenadas $H(x, \alpha)$ sean de la forma

$$H(x, \alpha) = (h(x, \alpha), \alpha) = (y, \alpha).$$

De esta forma se deja la ecuación $\dot{\alpha} = 0$ invariante. En la práctica uno procede como en el caso ya descrito anteriormente pero los coeficientes de (2.16) deben considerarse como series de potencias tanto en x como en el parámetro α .

Supongamos que (2.15) presenta una bifurcación X de codimensión k (i.e., que satisface k condiciones algebraicas) en el equilibrio $x^* = 0$ cuando $\alpha = 0$. Y supongamos que —por ejemplo, ocupando el teorema de la forma normal— logramos construir un sistema “simple”

$$\dot{y} = g(y, \beta; \sigma), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (2.17)$$

polinomial en y_i , $i = 1, \dots, n$, que tenga para $\beta = 0$ un equilibrio en $y^* = 0$ satisfaciendo las mismas k condiciones de bifurcación que (2.15). Aquí el vector $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ corresponde a los coeficientes de los polinomios de (2.17); por ejemplo,

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & i \neq i_0, \\ \pm 1, & i = i_0. \end{cases}$$

Definición 14 *El sistema (2.17) se dice una **forma normal topológica** para la bifurcación X si cualquier sistema genérico (2.15) con equilibrio en $x^* = 0$ satisfaciendo las mismas condiciones de bifurcación en $\alpha = 0$ es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a (2.17) para ciertos valores de los coeficientes σ_i .*

En muchos casos se puede probar que las formas normales topológicas que derivamos son deformaciones versales de las correspondientes bifurcaciones. Nos concentraremos en formas normales topológicas con el mínimo número de parámetros necesarios, también llamadas *desdoblamientos miniversales* —tan solo k parámetros si la codimensión de la bifurcación es k . En ese sentido, una forma normal topológica para una bifurcación es una versión simplificada y cualitativamente equivalente de todo campo de vectores que exhibe esa misma bifurcación.

Capítulo 3

Bifurcaciones locales de codimensión uno en sistemas dinámicos continuos

Considere el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es suave con respecto a (x, α) . Sea $x = x_0$ un equilibrio hiperbólico para $\alpha = \alpha_0$. Si uno realiza una pequeña perturbación del parámetro α , el equilibrio mueve un poco su ubicación pero sigue siendo hiperbólico, i.e., su estabilidad no cambia. Pero si la variación del parámetro es lo suficientemente grande, hay (genéricamente) dos maneras en que el equilibrio podría perder su hiperbolicidad:

1. Un valor propio simple se anula; por ej., $\lambda_1 = 0$.
2. Un par de valores propios complejos conjugados se ubica en el eje imaginario; por ej., $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$.

En este capítulo veremos que un sistema dinámico continuo con un punto de equilibrio no hiperbólico satisfaciendo una de las condiciones de arriba es estructuralmente inestable y veremos el análisis de las correspondientes bifurcaciones de los retratos de fase locales bajo variación del parámetro.

Definición 15 La bifurcación genérica asociada con la aparición de un valor propio nulo, $\lambda_1 = 0$, se llama **bifurcación fold**. También se conoce como **bifurcación silla-nodo (SN)**, **punto límite (LP)** o **tangente**. Es posible encontrarla en sistema de dimensión $n \geq 1$.

Definición 16 La bifurcación genérica asociada a la presencia de un par de valores propios complejos conjugados con parte real nula, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, se llama **bifurcación de Hopf**. También se conoce como **bifurcación Andronov-Hopf** o incluso **bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf**. Para que esta bifurcación ocurra la dimensión del espacio de fase debe ser $n \geq 2$.

3.1. Bifurcación fold o silla-nodo

Consideremos el campo de vectores en la recta real

$$\dot{x} = \alpha + x^2 =: f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

En $\alpha = 0$ el sistema tiene un equilibrio no-hiperbólico $x_0 = 0$ con valor propio $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. La figura 3.1 muestra los distintos retratos de fase no equivalentes cerca de $\alpha = 0$.

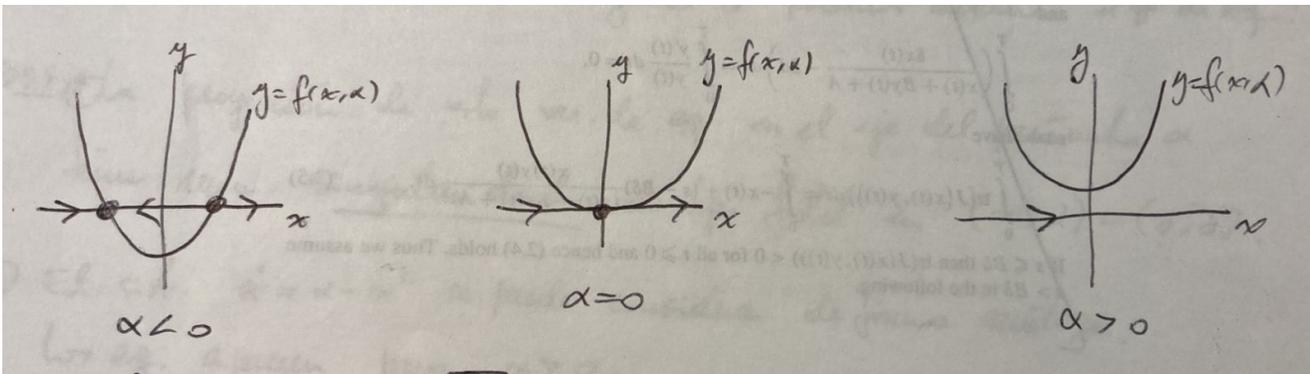


Figura 3.1:

Para $\alpha < 0$ existen dos equilibrios hiperbólicos ubicados en las coordenadas

$$x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}.$$

Uno de ellos es estable y el otro inestable. Para $\alpha > 0$, sin embargo, ya no hay equilibrios. Podemos visualizar cómo ocurre este cambio en la dinámica a medida que $\alpha \rightarrow 0^-$: los equilibrios $x_{1,2}(\alpha)$ se acercan entre sí y colisionan en el límite $\alpha = 0$ formando un solo equilibrio $x_0 = 0$ con valor propio $\lambda = 0$, y luego desaparecen para $\alpha > 0$. Notemos que $\frac{d}{d\alpha}x_{1,2}(\alpha) \rightarrow \infty$ a medida que $\alpha \rightarrow 0^-$.

Definición 17 La ecuación algebraica $f(x, \alpha) = 0$ define una **variedad de equilibrios** en el espacio producto $(x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

En este caso la variedad de equilibrios es la parábola $\alpha = -x^2$ graficada en la figura 3.2. Aquí se aprecia claramente cómo el proceso de acercamiento y “aniquilación” de los dos equilibrios ocurre de manera continua en $\alpha = 0$.

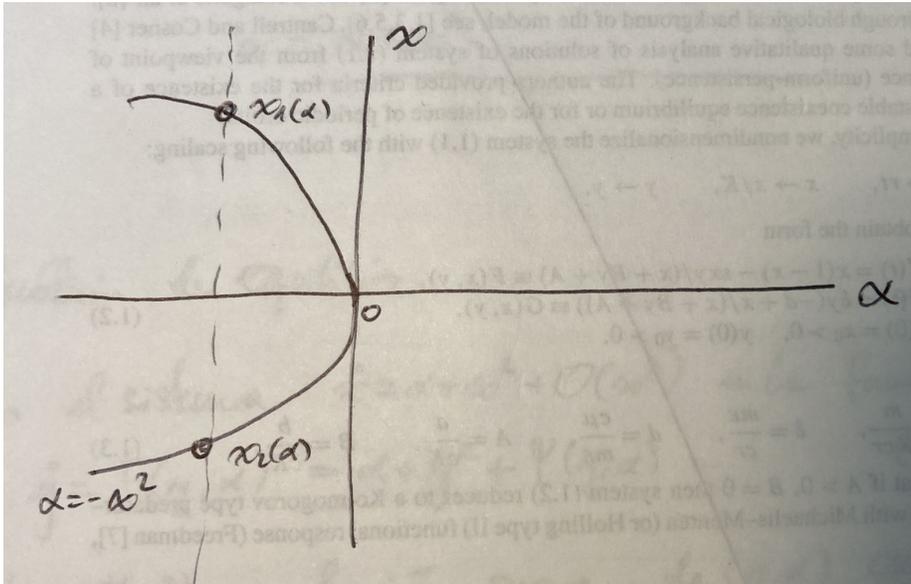


Figura 3.2:

La representación de la figura 3.2 posee varias ventajas: Nos muestra todo el panorama de los efectos de la bifurcación en una misma figura. Más aún, fijando el valor de α podemos determinar el número de equilibrios del sistema y el retrato de fase para ese valor particular del parámetro.

OBSERVACIONES.

1. La proyección de la variedad de equilibrios en el eje del parámetro α tiene una singularidad de tipo *fold* en $(x, \alpha) = (0, 0)$: La curva definida por $\alpha + x^2 = 0$ efectivamente “se dobla” en este punto, lo que le da el nombre a esta bifurcación.
2. El nombre de *silla-nodo* será más evidente al observar esta bifurcación en sistemas de dimensión mayor, lo cual haremos en el capítulo 5.

3. El sistema $\dot{x} = \alpha - x^2$ se puede analizar de manera análoga. En tal caso, los equilibrios aparecen para $\alpha > 0$.

El siguiente lema nos dice que si uno agrega términos de orden superior a (3.1), localmente estos no producen ningún efecto en la bifurcación fold.

Lema 1 *El sistema*

$$\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema

$$\dot{x} = \alpha + x^2.$$

DEMOSTRACIÓN.

Paso 1. Análisis de los equilibrios.

Reescribamos el sistema en la forma

$$\dot{y} = F(y, \alpha) := \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (3.2)$$

donde $\psi = O(y^3)$ es una función suave de (y, α) cerca de $(0, 0)$. Sea

$$M = \{(y, \alpha) : F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\}$$

la variedad de equilibrios de (3.2) cerca de $(0, 0)$ en el plano (y, α) . La curva M pasa por el origen, pues $F(0, 0) = 0$. Además $\partial F / \partial \alpha(0, 0) = 1$. Luego por el teorema de la función implícita, M se puede representar localmente como

$$M = \{(y, \alpha) : \alpha = g(y)\},$$

donde g es suave y está definida para todo $|y|$ pequeño. Más aún,

$$g(y) = -y^2 + O(y^3),$$

y se tiene el gráfico de la figura 3.3. Luego, para todo $\alpha < 0$ suficientemente pequeño, existen dos equilibrios de (3.2) cerca del origen, $y_{1,2}(\alpha)$, los cuales están cerca de los equilibrios $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$ para los mismos valores del parámetro.

Paso 2. Construcción de un homeomorfismo.

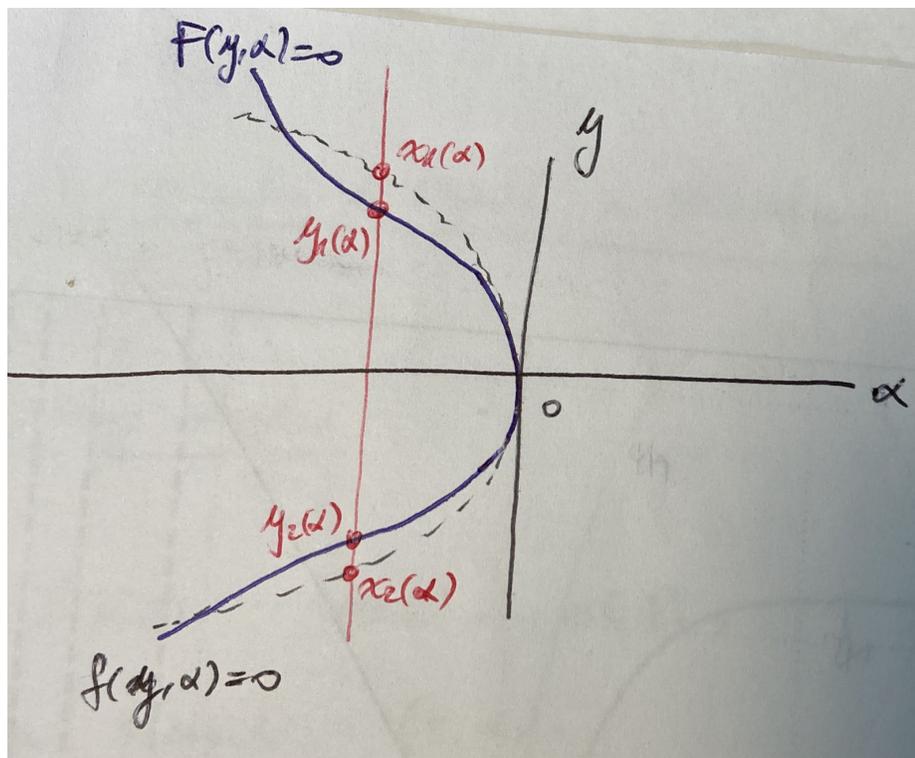


Figura 3.3:

Para $|\alpha|$ pequeño construimos un mapeo

$$y = h_\alpha(x)$$

de la siguiente forma: Para $\alpha \geq 0$: $h_\alpha(x) = x$ (i.e., identidad); para $\alpha < 0$: $h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x$ (función lineal), donde los coeficientes a, b quedan únicamente determinados por las condiciones

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2;$$

es decir, los equilibrios son llevados en equilibrios. (Tarea: hallar a, b .) El mapeo así construido $h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo que mapea órbitas de (3.1) cerca del origen en órbitas de (3.2), preservando la orientación del tiempo.

3.1.1. Forma normal topológica de la bifurcación fold

A continuación demostramos que el sistema (3.1) (módulo un posible cambio de signo del término x^2) es una forma normal topológica de un sistema unidimensional que pasa por una bifurcación fold. (Veremos en el capítulo 5 que esta ecuación también describe, en cierto sentido, a la bifurcación fold en un sistema n -dimensional genérico.)

Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

con f suave, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. Expandimos f es una serie de Taylor con respecto a x en $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde

- $f_0(0) = f(0, 0) = 0$, (*condición de equilibrio*);
- $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$, (*condición de bifurcación fold*).

Nuestra estrategia es transformar (3.3) en la forma (3.1), incluyendo hasta términos de orden 2, mediante cambios de coordenadas y de parámetros invertibles y suaves (i.e., difeomorfismos).

Paso 1. Traslación.

Sea la nueva variable

$$y = x + \delta(\alpha),$$

donde $\delta = \delta(\alpha)$ es una función a priori desconocida que definiremos después. La transformación inversa es $x = y - \delta$. Sustituyendo y en (3.3) tenemos:

$$\dot{y} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(y - \delta) + f_2(\alpha)(y - \delta)^2 + \dots$$

Entonces, reescribiendo el campo como una expansión en y :

$$\begin{aligned} \dot{y} = & (f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)) \\ & + (f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)) y \\ & + (f_2(\alpha) + O(\delta)) y^2 + O(y^3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notemos que si $f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2) = 0$, aniquilaríamos los términos de orden 1 en y , acercándonos a la forma (3.1). Veamos cómo esto puede ser posible. Supongamos que

$$f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \neq 0. \quad (3.5)$$

Entonces existe una función suave $\delta(\alpha)$ que aniquila los términos de orden 1 en y para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. En efecto, el coeficiente del término lineal es

$$F(\alpha, \delta) := f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta)$$

para alguna función suave ψ . Se tiene:

- $F(0, 0) = 0$;
- $\frac{\partial F}{\partial \delta}(0, 0) = -2f_2(0) \neq 0$ (por (3.5));
- $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0, 0) = f_1'(0)$.

Luego, por el teorema de la función implícita, existe localmente una única función suave $\delta = \delta(\alpha)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$.

Se tiene entonces

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2).$$

(tarea: verificar!)

Con esta elección para $\delta(\alpha)$, la ecuación para y ahora no contiene términos lineales. Al expandir los coeficientes de (3.4) en términos de α tenemos:

$$\dot{y} = (f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)) + (f_2(0) + O(\alpha))y^2 + O(y^3). \quad (3.6)$$

Paso 2. Introducir un nuevo parámetro.

Considerando el coeficiente constante en (3.6), sea

$$\mu = \mu(\alpha) = f_0'(0)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha),$$

donde ϕ es alguna función suave. Tenemos:

- $\mu(0) = 0$;

$$\blacksquare \mu'(0) = f'_0(0) = f_\alpha(0, 0).$$

Ahora supongamos que

$$f_\alpha(0, 0) \neq 0. \quad (3.7)$$

Entonces el teorema de la función inversa implica la existencia y unicidad local de una función inversa suave $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$. Por lo tanto, en (3.6) se tiene

$$\dot{y} = \mu + b(\mu)y^2 + O(y^3),$$

donde $b(\mu)$ es una función suave con $b(0) = f_2(0) \neq 0$ (por (3.5)). En particular, el signo de $b(0)$ es constante.

Paso 3. Reescalamiento final.

Definiendo una nueva variable $v = |b(\mu)|y$ y un nuevo parámetro $\beta = |b(\mu)|\mu$, tenemos

$$\dot{v} = \beta + sv^2 + O(v^3),$$

donde $s = \text{sign}(b(0)) = \pm 1$. En resumen, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 6 *Suponga un sistema unidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave. Suponga que en $\alpha = 0$ se tiene el equilibrio $x = 0$. Sea $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. Supongamos además que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(A.1) \quad f_{xx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(A.2) \quad f_\alpha(0, 0) \neq 0.$$

Entonces existen cambios invertibles de coordenadas ($x \mapsto v$) y de parámetros ($\alpha \mapsto \beta$) que transforman el sistema en

$$\dot{v} = \beta \pm v^2 + O(v^3).$$

Ocupando el lema 1 podemos eliminar los términos $O(v^3)$ en el teorema anterior y arribar finalmente al resultado deseado.

Teorema 7 (*Forma normal topológica de la bifurcación fold*)
Cualquier sistema genérico unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave, que posee en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ y que satisfaga las condiciones (A.1) y (A.2) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\dot{v} = \beta \pm v^2.$$

OBSERVACIONES. Las condiciones (A.1) y (A.2) de los teoremas anteriores son *condiciones de no-degeneración*. Nos especifican cuáles sistemas uniparamétricos exhibiendo una bifurcación fold se pueden considerar como *genéricos*:

- (A.1) **Condición de genericidad.** Condición algebraica de los coeficientes en la expansión de Taylor de $f(x, \alpha)$ con respecto a x en $(x, \alpha) = (0, 0)$. Garantiza que el equilibrio $x = 0$ no sea “tan” degenerado, es decir, que sea “típico” dentro de la clase de equilibrios que satisfacen las condiciones de bifurcación dadas.
- (A.2) **Condición de transversalidad.** Condiciones en las cuales hay derivadas de f con respecto a α en $(x, \alpha) = (0, 0)$. Asegura que los parámetros “despliegan” o “desdoblan” (del inglés *unfold*) esta singularidad en una forma genérica. Es decir, los retratos de fase topológicamente no equivalentes en torno al valor de bifurcación se pueden hallar de manera estructuralmente estable a medida que el parámetro cruza transversalmente el conjunto de bifurcación.

3.1.2. Bifurcaciones fold degeneradas

Si en los teoremas anteriores no se satisface la condición de transversalidad (A.2), entonces la bifurcación puede ser algo distinta en carácter. Por ejemplo, el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \mu) := \mu x + x^2,$$

posee en $\mu = 0$ un equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ por lo que satisface la condición de bifurcación fold, pero no se satisface (A.2) pues $f_\mu(0, 0) = 0$. De hecho, en este sistema siempre hay dos equilibrios, en $x = 0$ y $x = -\mu$. Y en $\mu = 0$ ambos equilibrios están intercambiando estabilidad, por lo que efectivamente está ocurriendo una bifurcación. Este fenómeno se conoce como **bifurcación transcrítica**. Sin embargo, este sistema siempre posee un equilibrio en $x = 0$, independiente del valor del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$; luego, esta bifurcación transcrítica no es una deformación versal de la singularidad fold x^2 pues existen deformaciones más generales que para ciertos valores de parámetros no poseen ningún equilibrio. De todas maneras, uno puede encontrar esta bifurcación en sistemas con una simetría especial —por ejemplo, un sistema que requiera que $x = 0$ sea siempre un equilibrio.

Otra bifurcación fold interesante ocurre cuando la condición de genericidad (A.1) es violada, es decir, cuando el término cuadrático de la expansión de Taylor se anula. Esto corresponde al campo de vectores

$$f(x, 0) = dx^3 + g(x),$$

donde $g(x) = o(x^3)$. Una deformación de este sistema, en general, contiene todos los términos de orden inferior,

$$f(x, \mu) = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 + dx^3 + g(x, \mu).$$

Un caso especial de este sistema ocurre cuando $a(\mu) = c(\mu) = 0$. Esto da lugar a la **bifurcación pitchfork**, la cual corresponde a un equilibrio perdiendo estabilidad por la creación de dos nuevos equilibrios simétricos, como vimos anteriormente en el ejemplo 4.

3.2. Bifurcación de Hopf

Considere el sistema planar visto inicialmente en el ejemplo 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (3.8)$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Este sistema posee un equilibrio en el origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$ para todo α . La matriz jacobiana asociada es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Claramente, para $\alpha = 0$, este equilibrio es no hiperbólico; para $\alpha < 0$, el origen es un foco estable, y para $\alpha > 0$ es foco inestable, por lo que está ocurriendo una bifurcación en $\alpha = 0$.

Introduciendo coordenadas polares $\rho = x_1^2 + x_2^2$, $\varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

el cual se puede extender continuamente a $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Notemos que las ecuaciones para ρ y φ son desacopladas. Luego, es fácil analizar las soluciones y las bifurcaciones. A partir de la primera ecuación de (3.9) vemos que $\rho = 0$ es un equilibrio linealmente estable para $\alpha < 0$ y no linealmente estable (i.e., la convergencia no es exponencial) para $\alpha = 0$; mientras que para $\alpha > 0$ el origen es linealmente inestable y el punto $\rho = \sqrt{\alpha}$ es atractor; ver figura 3.4.

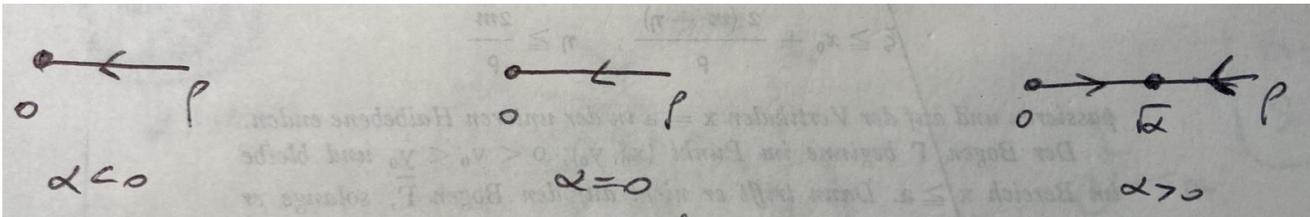


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación para ρ en (3.9).

Por otro lado, la ecuación $\dot{\varphi} = 1$ describe una rotación a velocidad constante. Al superponer los movimientos independientes definidos por las dos ecuaciones de (3.9) obtenemos los retratos de fase de la figura 3.5. De esta manera, para $\alpha > 0$ descubrimos que existe un ciclo límite estable de radio constante $\sqrt{\alpha}$ rodeando al foco inestable en el origen.

En el espacio extendido (x_1, x_2, α) el diagrama de bifurcación incluye una familia de ciclos (parametrizada por α) formando una superficie paraboloides que

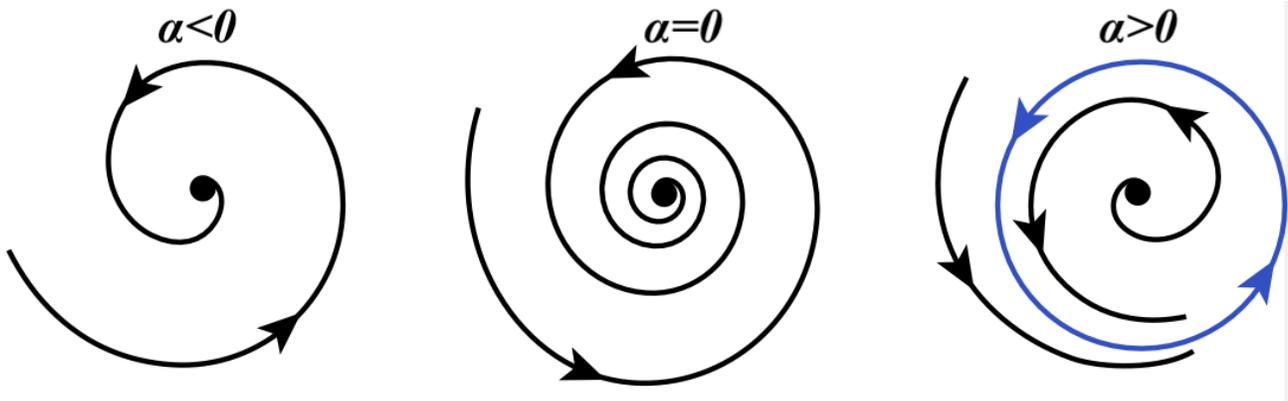


Figura 3.5: Bifurcación de Hopf supercrítica.

se abre hacia el semiespacio $\alpha > 0$ como en la figura 3.6. Esto se conoce como **bifurcación de Hopf supercrítica**.

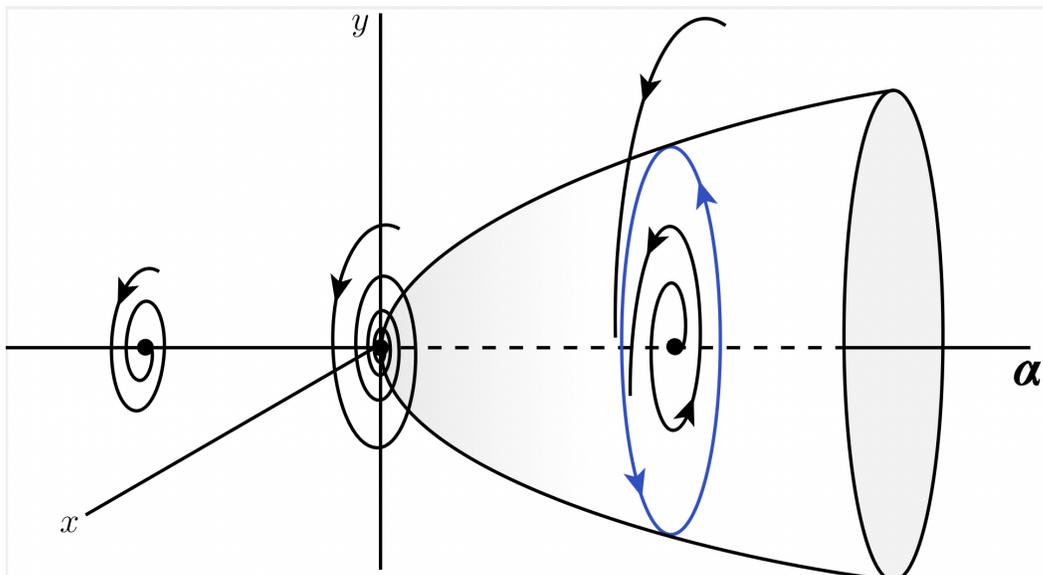


Figura 3.6: Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio extendido (x_1, x_2, α) .

OBSERVACIONES.

1. Hay dos tipos de bifurcación de Hopf genéricas. Uno es el caso supercrítico mostrado arriba; el otro es la **bifurcación de Hopf subcrítica**, una de

cuyas realizaciones está presente en el campo de vectores

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

El diagrama de bifurcación de la bifurcación de Hopf subcrítica se muestra en la figura 3.7.

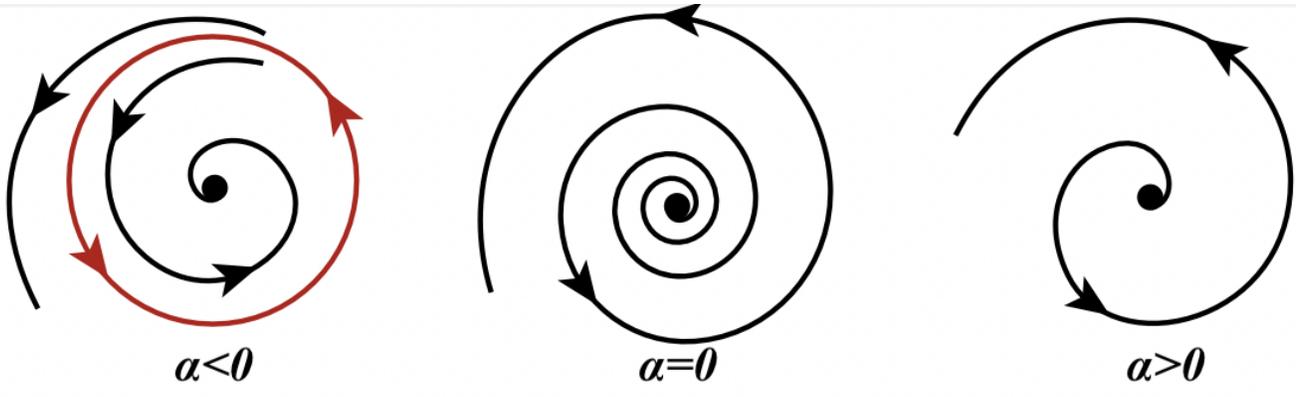


Figura 3.7: Bifurcación de Hopf subcrítica.

2. En ambos casos el equilibrio pierde estabilidad en $\alpha = 0$ cuando α es creciente.
 - a) En el caso supercrítico, el equilibrio es reemplazado por un ciclo estable infinitesimal. Luego, las soluciones permanecen en una vecindad del equilibrio. Uno habla que el sistema permanece “bajo control”. Si α vuelve a ser negativo, el sistema regresa al equilibrio estable.
 - b) En el caso subcrítico, la región de atracción del equilibrio está acotada por un ciclo inestable que existe para $\alpha < 0$, ver figuras 3.7 y 3.8. A medida que α crece y se acerca a $\alpha = 0$, el ciclo se achica y eventualmente desaparece. Luego, las órbitas ya no están confinadas a una vecindad del equilibrio. Si α vuelve a ser negativo, el sistema, en general, no regresa al equilibrio estable, pues puede que haya abandonado su región de atracción; compare las figuras 3.5 y 3.6, con las figuras 3.7 y 3.8, respectivamente.

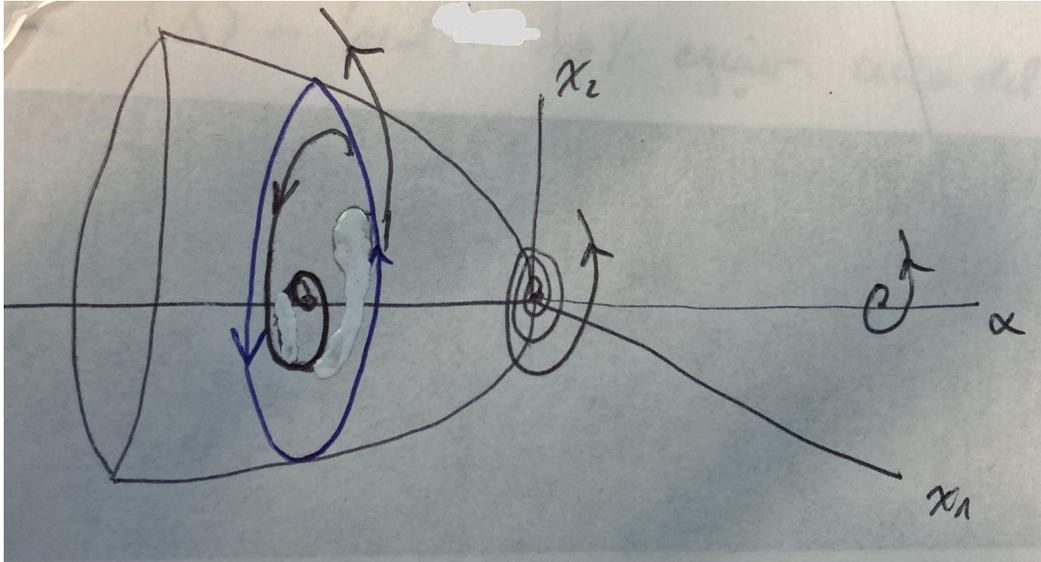


Figura 3.8: Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio extendido (x_1, x_2, α) .

3. En el caso en que el sistema tenga la misma parte lineal A de (3.8), pero sin términos no-lineales, se obtiene un caso degenerado. En efecto, el sistema (lineal) en coordenadas complejas $\dot{z} = (\alpha + i)z$ también posee un foco estable para $\alpha < 0$, y un foco estable para $\alpha > 0$. Sin embargo, no hay ciclos para $\alpha \neq 0$. Más aún, si $\alpha = 0$, el origen se vuelve un centro, i.e., un equilibrio no-hiperbólico rodeado de un continuo de órbitas periódicas. Podemos pensar que el diagrama de bifurcación resultante en la figura 3.9 muestra el mismo paraboloides compuesto de órbitas periódicas de los casos super- y subcrítico pero ahora “degenerado” al plano $\alpha = 0$.

El siguiente lema nos dice que si uno agrega términos de orden superior a (3.8), localmente estos no producen ningún efecto en la bifurcación de Hopf.

Lema 2 *Consideremos el sistema planar*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (3.10)$$

donde $x = (x_1, x_2)^t$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, y los términos $O(\|x\|^4)$ puede depender en forma suave de α . Entonces, (3.10) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a (3.8).

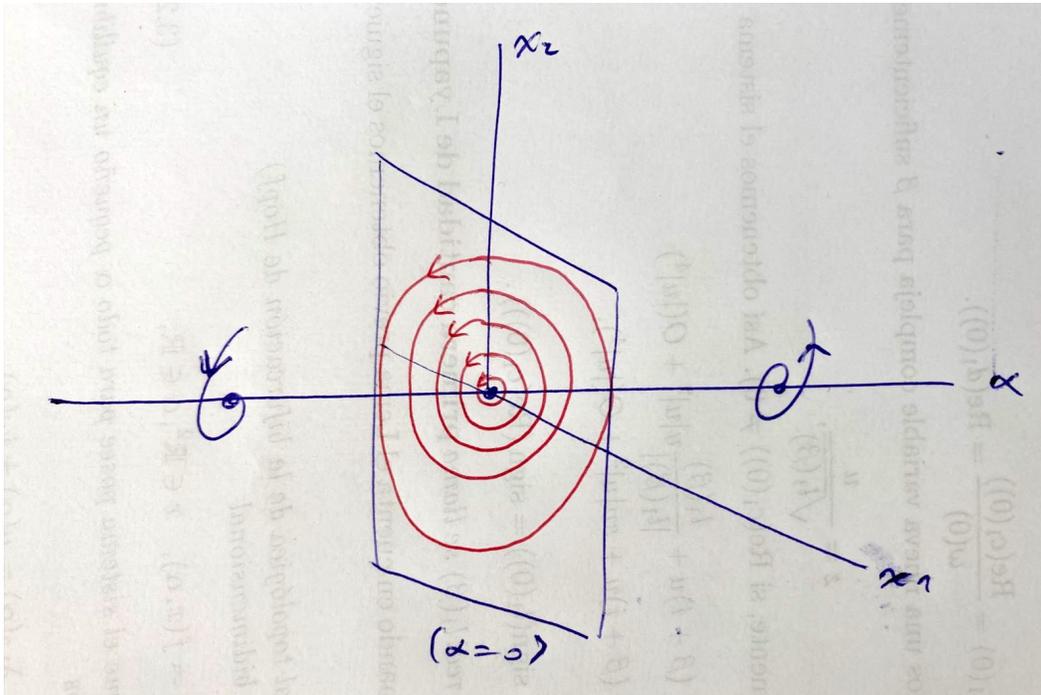


Figura 3.9:

DEMOSTRACIÓN. Reescribamos el enunciado en notación compleja equivalente:

El sistema

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 + O(|z|^4) \tag{3.11}$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2. \tag{3.12}$$

Paso 1. Existencia y unicidad del ciclo.

La ecuación (3.11) en coordenadas polares (ρ, φ) nos queda:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} = 1 + \Psi(\rho, \varphi), \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $\Phi = O(|\rho|^4)$ y $\Psi = O(|\rho|^3)$, y la dependencia con respecto a α de estas funciones no se indica para simplificar la notación.

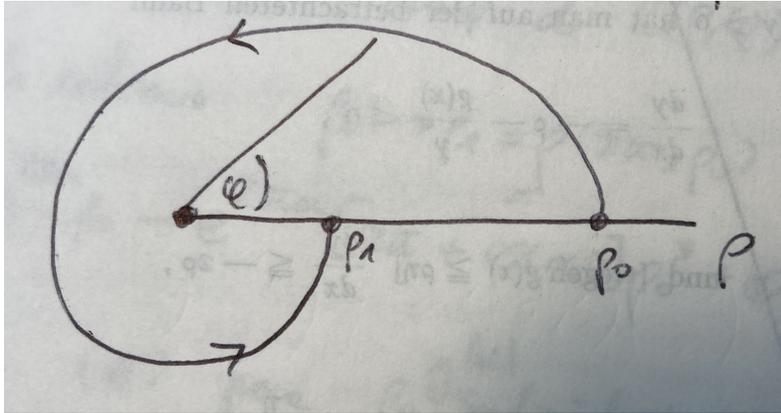


Figura 3.10:

Si $\rho_0 > 0$ es suficientemente grande, una órbita de (3.13) comenzando en $(\rho, \varphi) = (\rho_0, 0)$ es como en la figura 3.10 y tiene la forma general

$$\begin{cases} \rho = \rho(\varphi; \rho_0), \\ \rho_0 = \rho(0, \rho_0), \end{cases}$$

donde ρ satisface

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi)}{1 + \Psi(\rho, \varphi)} = \rho(\alpha - \rho^2) + R(\rho, \varphi), \quad (3.14)$$

donde $R = O(|\rho|^3)$. ¿Cómo podemos hallar el punto ρ_1 en la figura 3.10? Para eso necesitaremos construir la aplicación de retorno de Poincaré definida en la sección $\varphi = 0$.

Notemos que la transición de (3.13) a (3.14) es equivalente a introducir una nueva parametrización del tiempo en la cual $\dot{\varphi} = 1$. Luego, el tiempo de retorno al semieje $\varphi = 0$ es el mismo para todas las órbitas en este eje con $\rho_0 > 0$ y es igual a 2π .

Dado que $\rho(\varphi; 0) = 0$, podemos escribir la serie de Taylor para $\rho(\varphi; \rho_0)$ en potencias de ρ_0 cerca de $\rho_0 = 0$:

$$\rho = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4). \quad (3.15)$$

Luego,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = u'_1(\varphi)\rho_0 + u'_2(\varphi)\rho_0^2 + u'_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4). \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.15) y (3.16) en (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} u'_1(\varphi)\rho_0 + u'_2(\varphi)\rho_0^2 + u'_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4) &= (u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4)) \\ &\quad \times \left(\alpha - (u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4)) \right)^2 \\ &\quad + R(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Igualando términos en las correspondientes potencias de ρ_0 obtenemos un sistema de EDOs para las incógnitas u_1, u_2, u_3 . Al agregar condiciones iniciales $u_1(0) = 1, u_2(0) = u_3(0) = 0$, estas EDOs se pueden resolver y obtener:

$$u_1(\varphi) = e^{\alpha\varphi}, \quad u_2(\varphi) = 0, \quad u_3(\varphi) = \frac{(1 - e^{2\alpha\varphi})e^{\alpha\varphi}}{2\alpha}.$$

(Notemos que estas expresiones son independientes de $R(\rho, \varphi)$.)

Por lo tanto, el mapeo de retorno $\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$ tiene la forma:

$$\rho_1 = e^{2\pi\alpha}\rho_0 - e^{2\pi\alpha}(2\pi + O(\alpha))\rho_0^3 + O(\rho_0^4). \quad (3.17)$$

Podemos analizar los puntos fijos de (3.17) para ρ_0 y $|\alpha|$ suficientemente pequeños en la figura 3.11. Si $\alpha < 0$ existe una vecindad del origen en la cual el mapeo tiene un solo punto fijo en $\rho = 0$. Pero si $\alpha > 0$ es suficientemente pequeño aparece un punto fijo adicional en $\rho = \sqrt{\alpha} + \dots$. La estabilidad de estos puntos fijos también se puede obtener de (3.17).

Tomando en cuenta que cada punto fijo positivo del mapeo de retorno corresponde a un ciclo límite del sistema, podemos concluir que el sistema (3.13) o (3.11) con cualquier término $O(|z|^4)$ posee un único ciclo límite (estable) bifurcándose del origen y existiendo para $\alpha > 0$ como en el sistema (3.12). Por lo tanto, los términos de orden superior no afectan la bifurcación del ciclo límite en una vecindad de $z = 0$ para $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Paso 2. Construcción de un homeomorfismo.

Fijemos un α pequeño, pero positivo. Ambos sistemas (3.11) y (3.12) tienen un ciclo límite en alguna vecindad del origen. Asumamos que aplicamos un reescalamiento del tiempo en (3.11) de manera que el tiempo de retorno al semieje $\varphi = 0$ es 2π (como en el paso anterior). Asumamos también que aplicamos un reescalamiento lineal de coordenadas en (3.11) tal que el punto de intersección del ciclo con el semieje $\varphi = 0$ es en $x_1 = \sqrt{\alpha}$.

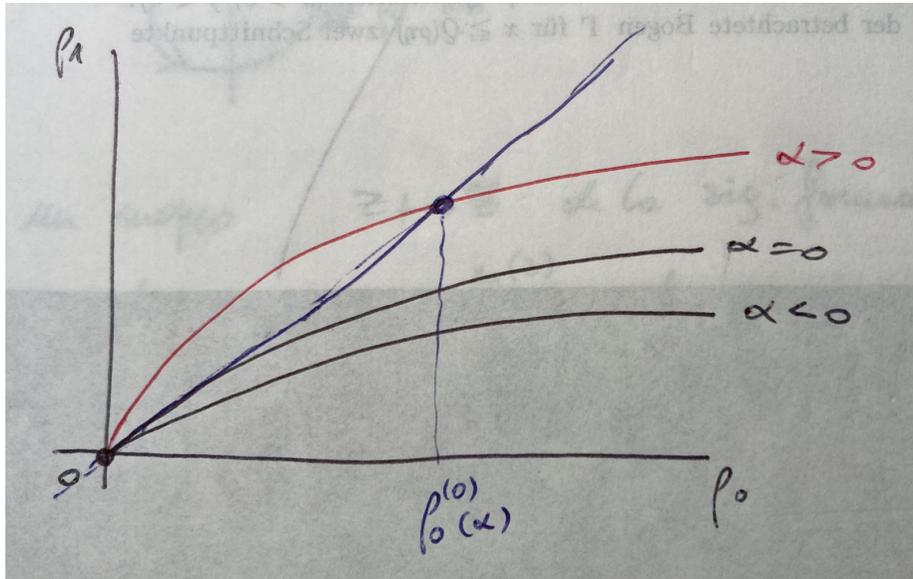


Figura 3.11:

Definamos un mapeo $z \mapsto \tilde{z}$ de la siguiente forma (ver también figura 3.12). Tomemos un punto $z = x_1 + ix_2$ en (3.12). Encontremos valores (ρ_0, τ_0) , donde τ_0 es el tiempo requerido para que una órbita que parte en $(\rho_0, 0)$ en el semieje $\varphi = 0$ llegue al punto z . Ahora, tomemos el sistema (3.11). Partiendo del punto $(\rho_0, 0)$ en el semieje $\varphi = 0$ construyamos una órbita de (3.11) en el intervalo de tiempo $[0, \tau_0]$. Denotemos el extremo de esta órbita en $t = \tau_0$ como $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$. Además, definamos $\tilde{z} = 0$ como imagen de $z = 0$. El mapeo así construido es un homeomorfismo. Para $\alpha > 0$ mapea órbitas de (3.12) en una vecindad del origen en órbitas de (3.11) preservando la dirección del tiempo. El caso $\alpha < 0$ se puede considerar de la misma manera sin necesidad de reescalar las coordenadas.

3.2.1. Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf

En esta sección probaremos que cualquier sistema bidimensional genérico que pase por una bifurcación de Hopf se puede transformar en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x^4\|).$$

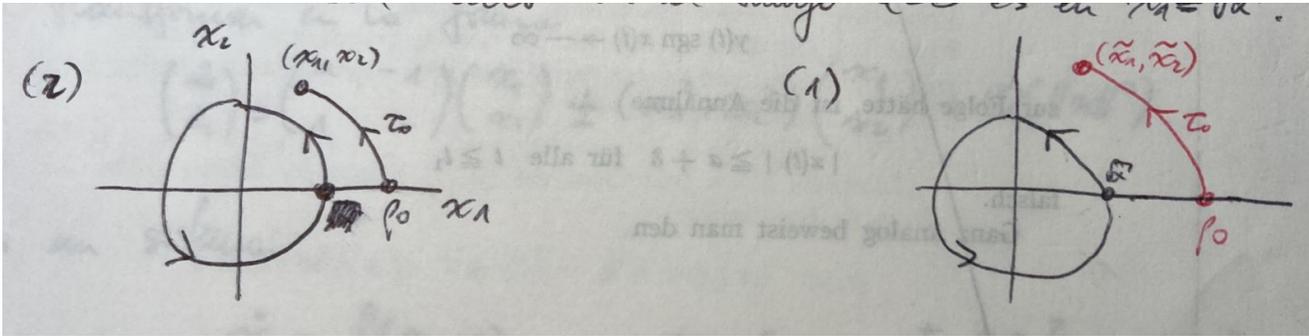


Figura 3.12:

Consideremos un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave, el cual tiene el equilibrio $x = 0$ para $\alpha = 0$ con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Dado que $Df(0, 0)$ es invertible (¿por qué?), por el teorema de la función implícita, el sistema posee un equilibrio $x_0(\alpha)$ en alguna vecindad del origen para todo α suficientemente pequeño tal que $x_0(0) = 0$. Mediante una traslación (que podría depender de α), podemos asumir que $x = 0$ es el equilibrio del sistema para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Luego, consideramos el sistema

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \tag{3.18}$$

donde F es una función vectorial suave cuyas componentes $F_{1,2}$ poseen expansiones de Taylor en x partiendo de los términos cuadráticos, es decir, $F = O(\|x\|^2)$. Además,

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}$$

donde a, b, c, d son funciones suaves de α . Los valores propios de $A(\alpha)$ satisfacen $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, donde

$$\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr}(A), \quad \Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det(A).$$

Luego,

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right).$$

La bifurcación nde hopf implica

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Para $|\alpha|$ pequeño podemos introducir

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)} \right).$$

Luego,

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)},$$

donde

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0. \quad (3.19)$$

Notemos que $\lambda(\alpha)$ es un número complejo para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Sea $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio (complejo) de $A(\alpha)$ correspondiente a $\lambda(\alpha)$:

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

y sea $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio (complejo) de $A^T(\alpha)$ correspondiente a $\overline{\lambda(\alpha)}$:

$$A^T(\alpha)p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha).$$

Podemos normalizar p con respecto a q tal que

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1.$$

(Aquí, \langle, \rangle es el producto interno en \mathbb{C}^2 : $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$.) Así, cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ se puede representar para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño como

$$x = zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha) \quad (3.20)$$

en forma única, para algún $z \in \mathbb{C}$ por determinar. En efecto, tomando producto escalar en (3.20) con $p(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), x \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha) \rangle \\ &= z\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \overline{z}\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle. \end{aligned}$$

Por un lado, $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$. Y por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle &= \langle p(\alpha), (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1} A \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1} \langle A^T p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1} \langle \overline{\lambda(\alpha)} p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1} \lambda(\alpha) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(1 - (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1} \lambda(\alpha)\right) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0.$$

Pero $\overline{\lambda(\alpha)} \neq \lambda(\alpha)$, pues $\omega(\alpha) > 0$. Luego, $\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0$. Por lo tanto,

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle$$

es la fórmula explícita para determinar el valor de z que hace posible la igualdad (3.20).

Ocupando la representación (3.20) y tomando producto escalar en (3.18) con $p(\alpha)$, la variable z satisface la EDO:

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha), \alpha) \rangle.$$

Por lo tanto obtenemos el siguiente lema.

Lema 3 *El sistema (3.18) se puede escribir para $|\alpha|$ suficientemente pequeño en la forma*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \overline{z}, \alpha),$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $g(z, \overline{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha), \alpha) \rangle = O(|z|^2)$ es una función suave de $(z, \overline{z}, \alpha)$.

La introducción de la variable compleja z puede verse como un cambio de coordenadas lineal $y = T(\alpha)x$, con $z = y_1 + iy_2$. Las componentes (y_1, y_2) son las coordenadas de x escritas en la base $\{2\text{Re}(q), -2\text{Im}(q)\}$ de vectores propios generalizados (reales) de $A(\alpha)$. En esta base, la matriz $A(\alpha)$ tiene la forma canónica (real) de Jordan

$$J(\alpha) = T(\alpha)A(\alpha)T^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la transformación $T(\alpha)$ “simplifica” al máximo los términos lineales. Esta es la misma idea de las formas normales! Justamente, los siguientes pasos para la obtención de nuestro resultado consisten en reducir los términos de orden superior vía el teorema de la forma normal. A continuación daremos un bosquejo de estos pasos. (Los detalles de estos resultados involucran muchos cálculos intermedios y pueden revisarse en la bibliografía.)

En primer lugar, se puede probar que todos los términos cuadráticos se pueden anular mediante cambios de coordenadas complejos, obteniéndose

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + c_1(\alpha)z^2\bar{z} + O(|z|^4),$$

donde $c_1(\alpha)$ es el único término cúbico resonante (complejo).

El siguiente paso es introducir un rescalamiento del tiempo

$$\tau = \omega(\alpha)t$$

(con $\omega(\alpha) > 0$) y un nuevo parámetro

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}.$$

Esta parametrización es válida solo si es invertible para todo $|\alpha|$ pequeño cerca de $\alpha = 0$, esto es, si

$$0 \neq \beta'(0) = \frac{\mu'(0)\omega(0) - \mu(0)\omega'(0)}{\omega^2(0)} = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)},$$

donde hemos ocupado la igualdad $\mu(0) = \beta(0) = 0$ de (3.19). Por lo tanto, si $\mu'(0) \neq 0$ obtenemos el sistema

$$\frac{dz}{d\tau} = (\beta + i)z + d_1(\beta)z|z|^2 + O(|z|^4),$$

donde

$$d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}$$

es una función que toma valores complejos.

Ahora introducimos una reparametrización no-lineal del tiempo definiendo la nueva variable independiente:

$$\theta = \theta(\tau, \beta),$$

donde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|z|^2)d\tau$$

es cercano a la identidad en una vecindad de $z = 0$ y

$$e_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta)).$$

Luego el sistema nos queda de la forma

$$\frac{dz}{d\theta} = (\beta + i)z + l_1(\beta)z|z|^2 + O(|z|^4),$$

donde

$$l_1(\beta) = \text{Re}(d_1(\beta)) - \beta e_1(\beta) \in \mathbb{R}$$

y además

$$l_1(0) = \frac{\text{Re}(c_1(0))}{\omega(0)} = \text{Re}(d_1(0)).$$

A continuación definimos una nueva variable compleja para β suficientemente pequeño:

$$z = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

si $l_1(0) \neq 0$ (o equivalentemente, si $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$). Así obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) \\ &= (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \end{aligned}$$

con

$$s = \text{sign}(l_1(0)) = \text{sign}(\text{Re}(c_1(0))).$$

Definición 18 La función real $l_1(\beta)$ se llama **primera cantidad de Lyapunov**.

De todo lo anterior y tomando en cuenta el Lema previo obtenemos el siguiente resultado final.

Teorema 8 (*Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf*)

Supongamos un sistema bidimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

con f suave. Supongamos que el sistema posee para todo α pequeño un equilibrio en $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es la primera cantidad de Lyapunov;
2. $\mu'(0) \neq 0$.

Entonces el sistema es topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

El signo de $l_1(0)$ nos indica si la bifurcación de Hopf es supercrítica o subcrítica. En efecto, si $l_1(0) < 0$, se trata del caso supercrítico, mientras que si $l_1(0) > 0$ es una bifurcación de Hopf subcrítica. Existen fórmulas explícitas para calcular $l_1(0)$ explícitamente a partir de f en (3.21). Por ejemplo, supongamos que aplicamos la transformación de coordenadas $T(\alpha)$ de la demostración del Lema 3 —definida por los vectores propios generalizados de $Df(0, \alpha) = A(\alpha)$ — de manera que para $\alpha = 0$ el sistema 2-dimensional (3.21) toma la forma

$$\begin{cases} x' = -\omega y + P(x, y), \\ y' = \omega x + Q(x, y). \end{cases}$$

Entonces la primera cantidad de Lyapunov $l_1(0)$ se puede calcular como:

$$16 l_1(0) = P_{xxx} + P_{xyy} + Q_{xxy} + Q_{yyy} + \frac{1}{\omega} \left(P_{xy}(P_{xx} + P_{yy}) - Q_{xy}(Q_{xx} + Q_{yy}) - P_{xx}Q_{xx} + P_{yy}Q_{yy} \right), \quad (3.22)$$

donde todas las derivadas están evaluadas en $(0, 0)$.

Por otro lado, muchos paquetes computacionales ya tienen incorporadas en sus rutinas la evaluación de $l_1(0)$, lo cual hace que no sea indispensable saber la fórmula de memoria.

Ejemplo 17 Bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa (Holling 1965).

Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(1 - x_1) - \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}, \\ \dot{x}_2 = -dx_2 + \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}, \end{cases}$$

donde α es un parámetro de control y $r, c, \alpha, d > 0$. Supongamos además que $c > d$.

Para tratar con un sistema polinomial equivalente rescalamos el tiempo en la forma $t = (\alpha + x_1)\tau$ obteniendo el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - (cx_1x_2), \\ x'_2 = -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2. \end{cases}$$

El sistema posee el equilibrio no-trivial $E_0 = \left(\frac{\alpha d}{c-d}, \frac{r\alpha}{c-d} \left(1 - \frac{\alpha d}{c-d}\right)\right)$, con matriz jacobiana

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha\right) & -\frac{\alpha cd}{c-d} \\ \frac{\alpha r(c-d(1+\alpha))}{c-d} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2} = \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left(\frac{c-d}{c+d} - \alpha\right).$$

Se tiene $\mu(\alpha_0) = 0$ para $\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$. Más aún, $\omega_0^2(\alpha_0) = \frac{rc^2d(c-d)}{(c+d)^3} > 0$. Por lo tanto en $\alpha = \alpha_0$, el equilibrio E_0 tiene valores propios $\lambda_{1,2}(\alpha_0) = \pm i\omega_0$ y ocurre una bifurcación de Hopf. El equilibrio es estable para $\alpha > \alpha_0$ e inestable para $\alpha < \alpha_0$. La condición de transversalidad también se satisface

$$\mu'(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0 rd(c+d)}{2(c-d)^2} = -\frac{rd}{2(c-d)} < 0.$$

Por último, al calcular la primera cantidad de Lyapunov obtenemos

$$l_1(\alpha_0) = -\frac{rc^2d^2}{\omega} < 0.$$

Por lo tanto la bifurcación de Hopf es supercrítica y un único ciclo límite se bifurca desde E_0 y existe para $\alpha < \alpha_0$.

Capítulo 4

Bifurcaciones locales de codimensión uno en sistemas dinámicos discretos

Consideremos un sistema dinámico a tiempo discreto

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es suave con respecto a (x, α) . Sea x_0 un punto fijo hiperbólico para $\alpha = \alpha_0$, es decir,

- $x_0 = f(x_0, \alpha_0)$,
- $D_x f(x_0, \alpha_0)$ no tiene valores propios en el círculo unitario.

A medida que variamos el parámetro α podemos monitorear la coordenada x_0 del punto fijo y sus valores propios μ_1, \dots, μ_n . Al igual que en el caso continuo, las bifurcaciones más simples ocurren cuando x_0 pierde hiperbolicidad, es decir, cuando hay un valor propio, digamos μ_1 , con $|\mu_1| = 1$, i.e., sobre el círculo unitario en el plano complejo. Geométricamente hay 3 formas en que esto pueda ocurrir y se muestran en la figura 4.1.

Definición 19 (a) *La bifurcación asociada con la aparición de $\mu_1 = 1$ se llama **bifurcación fold** o **tangente**. También es conocida como **bifurcación Limit Point (LP)** y **Silla Nudo (SN)**.*

(b) *La bifurcación asociada con la aparición de $\mu_1 = -1$, es una **bifurcación flip** o **duplicación de período** (“*period-doubling*” en inglés).*

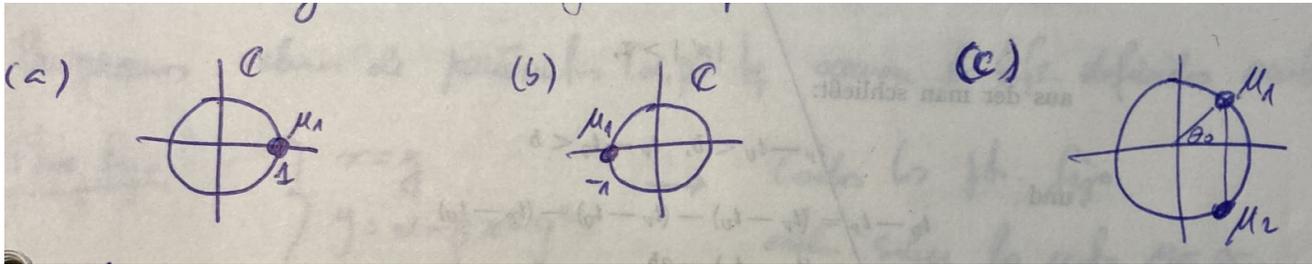


Figura 4.1:

(c) La bifurcación asociada a la presencia de un par de valores propios complejos conjugados con módulo 1, $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$, se llama **bifurcación Neimarck-Sacker** o **bifurcación de toro**.

Notemos que los casos (a) y (b) pueden ocurrir en sistemas discretos de dimensión $n \geq 1$, mientras que para que ocurra el caso (c) es necesario que $n \geq 2$. Todos estos casos son bifurcaciones de codimensión 1, siempre que se satisfagan ciertas condiciones de no-degeneración. Un punto fijo satisfaciendo cualquiera de las condiciones de arriba es estructuralmente inestable.

Ejemplo 18 Bifurcaciones en el mapeo de Hénon.

Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}.$$

Busquemos valores de parámetros (α, β) tales que ocurra alguna de las bifurcaciones estudiadas en esta sección (Omitiremos por ahora la verificación de las condiciones de genericidad, pero se sugiere su completación como tarea).

Los puntos fijos satisfacen $x = y$, $y = \alpha - \beta x - y^2$. Luego, todos los puntos fijos están sobre la recta $y = x$. Además, la coordenada y de un punto fijo satisface $y^2 + (1 + \beta)y - \alpha = 0$. Por lo tanto, el sistema posee a lo más dos puntos fijos.

La matriz Jacobiana del sistema viene dada por

$$A(x, y; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2y \end{pmatrix}.$$

Para que ocurra una bifurcación silla-nodo se debe satisfacer $\det(A - I) = 0$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 . Así, A tendrá un valor propio 1. Esto nos lleva a la ecuación $1 + \beta + 2y = 0$. Luego, el sistema algebraico

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0, \\ 1 + \beta + 2y &= 0, \end{aligned}$$

en las incógnitas (α, β) nos da el conjunto de valores de (α, β) para los cuales hay una bifurcación silla-nodo. Al resolver obtenemos

$$T = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4} \right\},$$

la cual representa una curva en el plano (β, α) a lo largo de la cual existe un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = 1$.

Similarmente, la condición para la bifurcación flip se puede escribir como $\det(A + I) = 0$, la cual lleva a $1 + \beta - 2y = 0$. Luego, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0, \\ 1 + \beta - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando y , obtenemos que el mapeo tiene un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = -1$ cuando los parámetros están en la curva

$$f = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4} \right\}.$$

Finalmente, para analizar la ocurrencia de una bifurcación Neimarck-Sacker, notemos que el producto de los multiplicadores de la forma $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm i\theta_0)$ es $\mu_1\mu_2 = 1 = \det(A)$, que es equivalente a la ecuación $1 - \beta = 0$. El diagrama de bifurcación resultante en el plano (β, α) muestra las tres curvas de bifurcación obtenidas.

Sin embargo, notemos que la curva de bifurcación Neimarck-Sacker está acotada por las curvas f y T , esto es,

$$NS = \{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 1, -1 < \alpha < 3 \}.$$

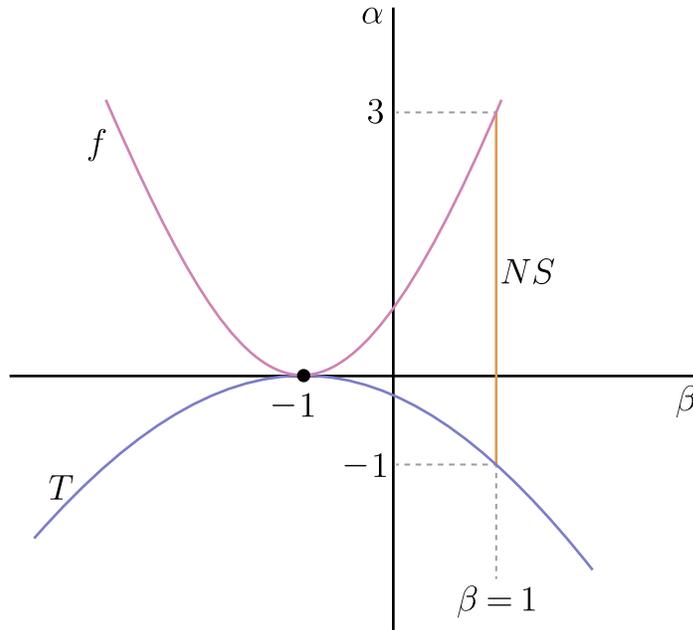


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación del mapeo de Hénon.

La razón es que una bifurcación Neimarck-Sacker solo puede considerarse cuando *exista* un punto fijo. Luego, esto ocurre para valores de (β, α) arriba de la curva T , i.e., para $\alpha > -1$ si $\beta = 1$. Además, notemos que la condición $\mu_1\mu_2 = 1$ también es válida para multiplicadores reales de la forma $\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = \frac{1}{\nu}$, $|\nu| > 1$, $\nu \in \mathbb{R}$. En ese caso, el punto fijo sería de tipo silla y no podría pasar por una bifurcación Neimarck-Sacker. Esto impone la condición extra $\alpha < 3$ si $\beta = 1$.

Habiendo podido hallar explícitamente el diagrama de bifurcación en el ejemplo anterior, quedan pendientes las preguntas: ¿Cuáles son los posibles retratos de fase para valores de parámetros en las regiones abiertas en el plano (β, α) ? ¿Cómo cambia el retrato de fase al atravesar una u otra curva de bifurcación? En las siguientes secciones responderemos estas preguntas y daremos las formas normales topológicas de estas bifurcaciones.

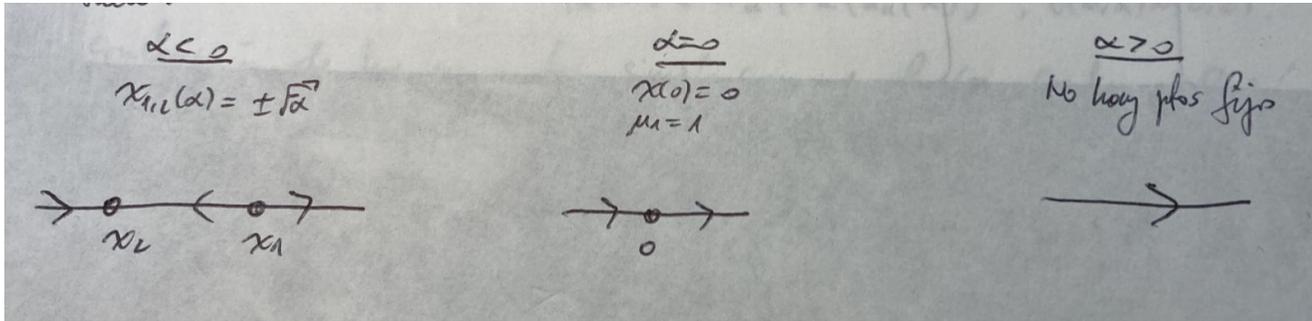


Figura 4.3:

4.1. Bifurcación fold

Considere el siguiente sistema dinámico discreto unidimensional

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 =: f(x, \alpha) = f_\alpha(x). \quad (4.1)$$

El mapeo $f_\alpha(x)$ es invertible para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad del origen. Para $\alpha = 0$ hay un punto fijo no hiperbólico en $x_0 = 0$ con valor propio $\mu = f_x(0, 0) = 1$. Se obtienen las dinámicas de la figura 4.3 para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad del origen. Si $\alpha < 0$, existen dos puntos fijos en $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, donde x_1 es repulsor y x_2 es atractor. A medida que α tiende a cero por la izquierda, los puntos fijos $x_{1,2}(\alpha)$ se acercan y, en el límite cuando $\alpha = 0$, colisionan en $x_0 = 0$, el cual es semiestable. Para $\alpha > 0$, ya no hay puntos fijos.

El diagrama de bifurcación resultante en el plano (x, α) se muestra en la figura 4.4. La ecuación $x - f(x, \alpha) = 0$ define una variedad de puntos fijos dada, en este caso, por $\alpha = -x^2$. En definitiva, el fenómeno es completamente análogo a la bifurcación fold del caso continuo. El caso $x \mapsto \alpha + x - x^2$ es similar; el análisis revela que los dos puntos fijos existen para $\alpha > 0$.

Ahora agreguemos términos de orden superior a (4.1):

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + x^3\psi(x, \alpha) =: F_\alpha(x), \quad (4.2)$$

donde $\psi(x, \alpha)$ depende de forma suave en (x, α) . Para $|\alpha|$ suficientemente pequeño el número y la estabilidad de los puntos fijos es el mismo que en (4.1) en una vecindad de $x = 0$. Luego es posible construir una conjugación topológica local entre

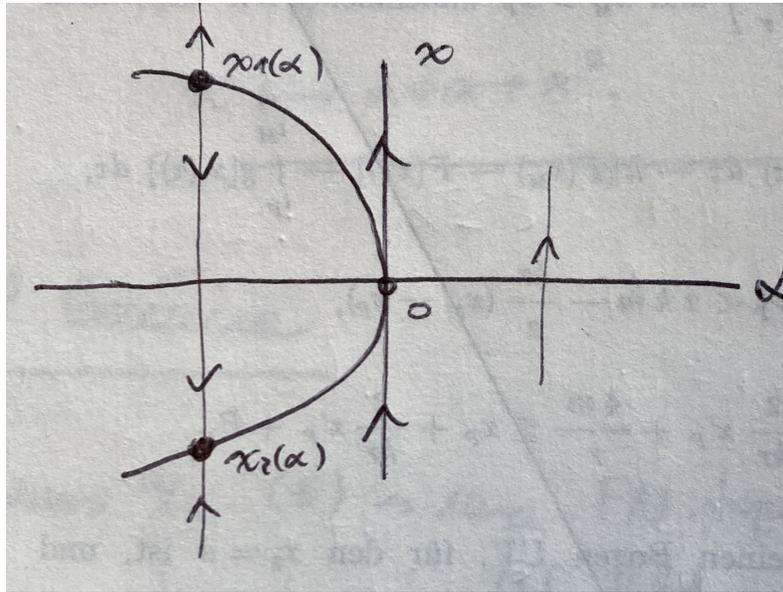


Figura 4.4:

(4.1) y (4.2), esto es, un homeomorfismo h_α de una vecindad de $x = 0$ mapeando órbitas de (4.1) en órbitas de (4.2) para cada $|\alpha|$ pequeño: $f_\alpha = h_\alpha^{-1} \circ f_\alpha \circ h_\alpha$, para todo (x, α) cerca de $(0, 0)$. Sin embargo, la construcción de h_α no es tan simple como en el caso continuo. La razón es que un homeomorfismo que mapee puntos fijos de (4.1) en puntos fijos de (4.2) no necesariamente mapea órbitas en órbitas. De todas formas se tiene el siguiente resultado.

Lema 4 *El sistema*

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + O(x^3)$$

es localmente topológicamente conjugado cerca del origen al sistema

$$x \mapsto \alpha + x + x^2.$$

Ahora probaremos que (4.1) es una forma normal topológica de un sistema unidimensional discreto genérico que tenga una bifurcación fold.

Teorema 9 *Supongamos un sistema unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un punto fijo $x_0 = 0$, y sea

$$\mu = f_x(0, 0) = 1.$$

Además, suponga que se cumplen las siguientes condiciones de no-degeneración:

$$(G) f_{xx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(T) f_\alpha(0, 0) \neq 0.$$

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a alguna de las siguientes formas normales topológicas:

$$y \mapsto \beta + y \pm y^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Expandemos $f(x, \alpha)$ en una serie de Taylor con respecto a x en $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3).$$

Por hipótesis se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ (el origen es un punto fijo);
- $f_1(0) = f_x(0, 0) = 1$ (ocurre una bifurcación fold).

Luego podemos escribir:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + [1 + g(\alpha)]x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde $g(\alpha)$ es suave y $g(0) = 0$.

A continuación hacemos una traslación de coordenadas $\xi = x + \delta$, donde $\delta = \delta(\alpha)$ se debe determinar. Sea $\tilde{x} = f(x, \alpha)$ la imagen de x . Luego:

$$\tilde{\xi} = \tilde{x} + \delta = f(x, \alpha) + \delta = f(\xi - \delta, \alpha) + \delta.$$

Expandiendo esta última expresión con respecto a ξ y escribiendo a su vez cada coeficiente como expansión en δ se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= f_0(\alpha) + [1 + g(\alpha)](\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + O(\xi^3) + \delta \\ &= f_0(\alpha) - g(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3) \\ &\quad + \xi + [g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\ &\quad + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3). \end{aligned}$$

Asumiendo que $f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \neq 0$, entonces existe una función suave $\delta(\alpha)$ que aniquila los términos $g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)$ en el coeficiente de orden 1 de la expansión anterior para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, esto es,

$$F(\alpha, \delta) := g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\varphi(\alpha, \delta) = 0,$$

para alguna función suave φ . Se tiene:

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \delta}(0,0) = -2f_2(0) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = g'(0),$$

lo que implica la existencia y unicidad de $\delta = \delta(\alpha)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0$. Entonces,

$$\delta(\alpha) = \frac{g'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2),$$

para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Luego,

$$\tilde{\xi} = [f'_0(0)\alpha + \alpha^2\psi(\alpha)] + \xi + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3),$$

donde ψ es una función suave y donde hemos expandido cada coeficiente en términos de α .

Sea el nuevo parámetro $\mu = \mu(\alpha) = f'_0(0)\alpha + \alpha^2\psi(\alpha)$, esto es, el término constante en la expresión para $\tilde{\xi}$. Tenemos:

1. $\mu(0) = 0$;
2. $\mu'(0) = f'_0(0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)$. (Recordemos que $f_0(\alpha) = f(0, \alpha)$.)

Luego si asumimos que $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = f'_\alpha(0,0) \neq 0$, entonces el teorema de la función inversa implica que localmente existe una única función inversa $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\tilde{\xi} = \mu + \xi + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

donde $b(\mu)$ es una función suave con $b(0) = f_2(0) \neq 0$.

Ahora sean $\eta = |b(\mu)|\xi$ y $\beta = |b(\mu)|\mu$, y obtenemos el sistema topológicamente equivalente

$$\tilde{\eta} = \beta + \eta + s\eta^2 + O(\eta^3),$$

donde $s = \text{sign}(b(0)) = \pm 1$. Finalmente el resultado se completa al aplicar el lema anterior.

4.2. Bifurcación flip

Considere el sistema dinámico unidimensional

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha).$$

El mapeo f es invertible para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño en una vecindad del origen. Además $x_0 = 0$ es un punto fijo con valor propio $\mu = -(1 + \alpha)$. En particular, para $|\alpha|$ suficientemente pequeño se cumple: Si $\alpha < 0$, x_0 es estable; si $\alpha > 0$ x_0 es inestable; y si $\alpha = 0$, x_0 es no-hiperbólico con valor propio $\mu = -1$. Notemos que no hay otros puntos fijos cerca de $x_0 = 0$ para $|\alpha|$ pequeño. ¿Adónde convergen entonces las órbitas para $\alpha > 0$ cuando x_0 es inestable?

Consideremos la segunda iteración $f^2(x, \alpha)$. Sea $y = f(x, \alpha)$. Entonces:

$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) &= f(y, \alpha) = -(1 + \alpha)y + y^3 \\ &= -(1 + \alpha) \left(-(1 + \alpha)x + x^3 \right) + \left(-(1 + \alpha)x + x^3 \right)^3 \\ &= (1 + \alpha)^2 x - \left((1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2) \right) x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

En el conjunto de puntos fijos de $f^2(x, \alpha)$ podemos hallar al origen $x_0 = 0$ (obviamente) y a otros dos puntos fijos no triviales para $\alpha > 0$ pequeño al resolver la ecuación

$$x_{1,2} = f^2(x_{1,2}, \alpha),$$

obteniendo los valores $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Los puntos fijos $x_{1,2}(\alpha)$ son ambos estables y forman una órbita de período 2 de $f(x, \alpha)$, es decir,

$$x_2 = f(x_1, \alpha), \quad x_1 = f(x_2, \alpha), \quad x_1 \neq x_2.$$

La figura 4.5 muestra cómo cambia la gráfica de $f^2(x, \alpha)$ a medida que α cruza el valor $\alpha = 0$ y la aparición de $x_{1,2}(\alpha)$ para $\alpha > 0$.

Toda esta información la podemos reunir en un solo diagrama de bifurcación como el de la figura 4.6. En el eje horizontal se ubica el punto fijo $x_0 = 0$, el cual cambia de estabilidad en $\alpha = 0$. La parábola $x = f^2(x, \alpha)$ representa las coordenadas del ciclo estable $\{x_1, x_2\}$ de período 2 para $\alpha > 0$. Luego, es natural hacer una analogía con la bifurcación de Hopf del caso continuo; de hecho, para este diagrama de bifurcación hablamos de una *bifurcación flip supercrítica*.

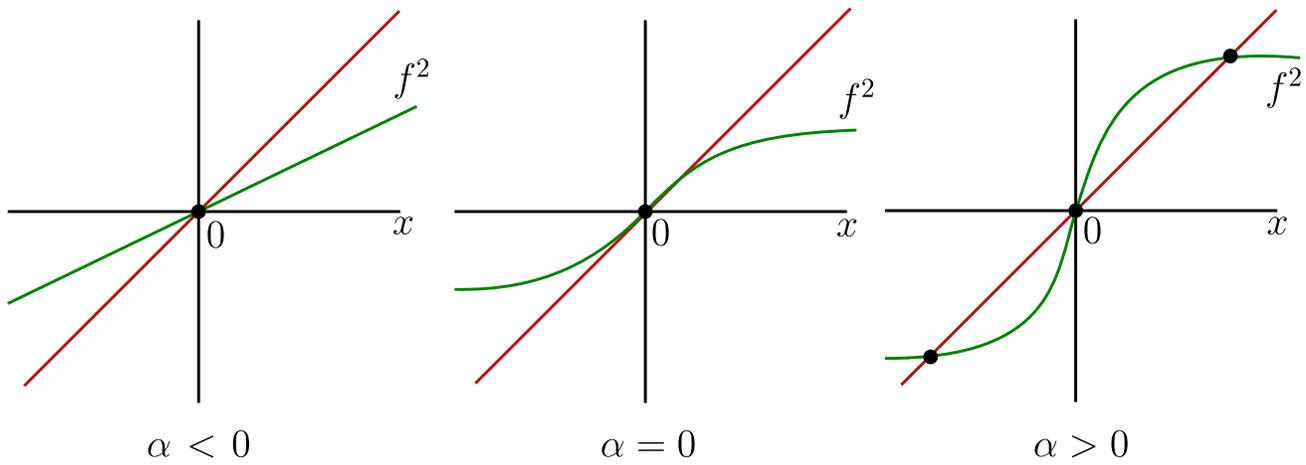


Figura 4.5: Forma cualitativa de f^2 cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

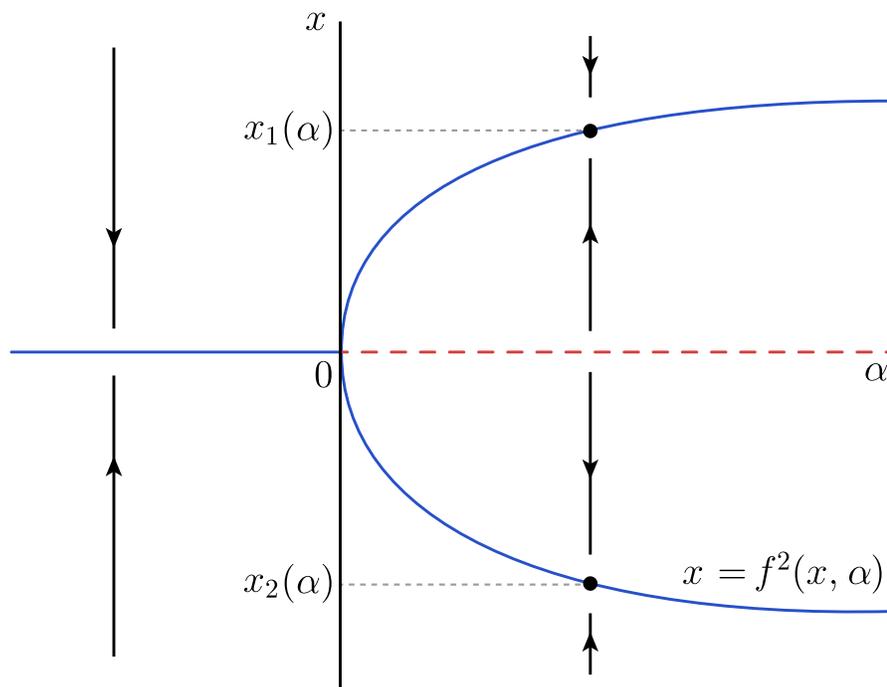


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación $x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3$ cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Similarmente a lo visto en la sección anterior para la bifurcación fold discreta, en este caso también podemos probar un resultado que indica que agregar térmi-

nos de orden superior a $f(x, \alpha)$ no altera la topología del diagrama de bifurcación ni de las órbitas en el espacio de fase. El análisis del punto fijo y del ciclo de período 2 en el siguiente lema es simple, pero el resto de la demostración no lo es aunque puede verse en las referencias.

Lema 5 *El sistema*

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 + O(x^4)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3.$$

El caso $x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3$ se puede tratar de manera análoga. El diagrama de bifurcación resultante es como el de la figura 4.7. Aquí los puntos de período 2 son inestables y existen para $\alpha < 0$; por ello uno habla de una *bifurcación flip subcrítica*.

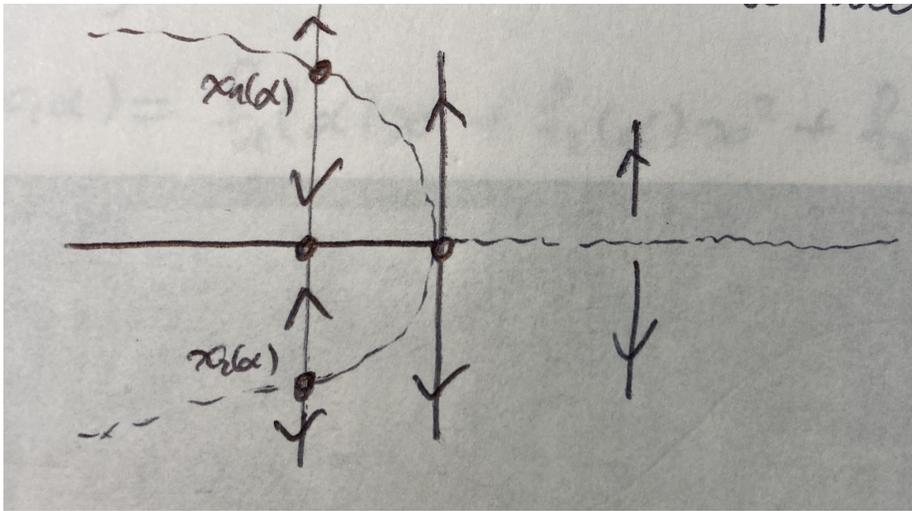


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación $x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3$ cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Teorema 10 *Suponga que el sistema unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave, posee en $\alpha = 0$ un punto fijo $x_0 = 0$, y sea

$$\mu = f_x(0, 0) = -1.$$

Además, suponga que se cumplen las siguientes condiciones de no-degeneración:

$$(G) \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3} f_{xxx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(T) f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0.$$

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a alguna de las siguientes formas normales topológicas:

$$y \mapsto -(1 + \beta)y \pm y^3.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de la función implícita el sistema tiene un único punto fijo $x_0(\alpha)$ en alguna vecindad del origen para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, pues $f_x(0, 0) \neq 1$. Podemos trasladar este equilibrio al origen y asumir, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$ es el punto fijo del sistema para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Luego, podemos escribir,

$$f(x, \alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4),$$

donde $f_1(\alpha) = -(1 + g(\alpha))$, para alguna función g suave. Dado que $g(0) = 0$ y $g'(0) = f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$, la función g es localmente invertible y podemos definir un nuevo parámetro $\beta = g(\alpha)$.

Si llamamos

$$\mu(\beta) = -(1 + \beta),$$

se tiene

$$\tilde{x} = f(x, \beta) = \mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 + O(x^4),$$

donde las funciones $a(\beta)$ y $b(\beta)$ son suaves. Tenemos :

$$a(0) = f_2(0) = f_{xx}(0, 0), \quad b(0) = \frac{1}{6} f_{xxx}(0, 0).$$

Definamos el cambio de coordenadas:

$$x = \varphi(y) := y + \delta y^2,$$

donde $\delta = \delta(\beta)$ es una función suave por definir. Esta transformación es invertible cerca del origen y su inversa φ^{-1} se puede hallar por el método de los coeficientes indeterminados obteniendo:

$$y = \varphi^{-1}(x) := x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4).$$

Busquemos una expresión para el mapeo en las nuevas coordenadas, esto es, $\bar{f}(y) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(y)$. Se tiene:

$$\tilde{y} = \bar{f}(y, \beta) = \mu y + (a + \delta\mu - \delta\mu^2)y^2 + (b + 2\delta a - 2\delta\mu(\delta\mu + a) + 2\delta^2\mu^3)y^3 + O(y^4).$$

Luego, el término cuadrático se puede eliminar para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño al tomar

$$\delta(\beta) = \frac{a(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)},$$

pues $\mu^2(0) - \mu(0) = 2 \neq 0$. Luego,

$$\tilde{y} = \bar{f}(y, \beta) = \mu y + \left(b + \frac{2a^2}{\mu^2 - \mu}\right) y^3 + O(y^4) = -(1 + \beta)y + c(\beta)y^3 + O(y^4).$$

Aquí $c = c(\beta)$ es una función suave tal que

$$c(0) = a^2(0) + b(0) = \frac{1}{4} (f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}(0, 0) \neq 0.$$

Por lo tanto, aplicando el reescalamiento

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{|c(\beta)|}},$$

se tiene en la coordenada η :

$$\tilde{\eta} = -(1 + \beta)\eta + s\eta^3 + O(\eta^4),$$

donde $s = \text{sign}(c(0)) = \pm 1$. El resultado sigue al aplicar el lema anterior.

Ejemplo 19 Considere la ecuación de Ricker:

$$x_{k+1} = \alpha x_k e^{-x_k},$$

donde x_k representa la densidad de una población en el año k . El parámetro $\alpha > 0$ es la tasa de crecimiento, y el término e^{-x_k} representa el rol negativo de competencia interespecie a altas poblaciones.

Sea $f(x, \alpha) = \alpha x e^{-x}$. Este sistema siempre posee el punto fijo trivial $x_0 = 0$ para todo α . En $\alpha_0 = 1$ aparece un punto fijo positivo no-trivial:

$$x_1(\alpha) = \ln(\alpha), \quad \alpha \geq 1.$$

El valor propio de $x_1(\alpha)$ es $\mu(\alpha) = 1 - \ln(\alpha)$. Luego, x_1 es estable para $1 < \alpha < \alpha_1$, e inestable para $\alpha > \alpha_1$, donde $\alpha_1 = e^2 \approx 7,38907$. En $\alpha = \alpha_1$ se tiene $\mu(\alpha_1) = -1$ y ocurre una bifurcación flip en $x(\alpha_1) = 2$.

Verifiquemos las condiciones de no-degeneración al evaluar las derivadas parciales en $(x, \alpha) = (2, e^2)$:

- $c(\alpha_1) = \frac{1}{6} > 0$.
- $f_{x\alpha} = -\frac{1}{e^2} \neq 0$.

Por lo tanto, aparece un único ciclo de período 2 desde x_1 para $\alpha > \alpha_1$. La estabilidad de $x(\alpha_1)$ para $\alpha = \alpha_1$ determina si la bifurcación es supercrítica o subcrítica. Más aún se puede probar que este ciclo pierde estabilidad en $\alpha_2 \approx 12,50925$ en una nueva bifurcación flip que le ocurre a f^2 . Esto genera un ciclo estable de período 4, el cual nuevamente se bifurca en $\alpha_4 \approx 14,24425$ dando paso a un ciclo de período 8, el cual pierde estabilidad en $\alpha_8 \approx 14,65267$. Es decir, a medida que α crece, el conjunto límite atractor va *duplicando su período* en una secuencia de bifurcaciones flip en f, f^2, f^4 , etc. En el proceso, cada punto fijo o ciclo ya existente va perdiendo estabilidad y se vuelve repulsor, y en su reemplazo aparece un ciclo atractor del *doble de período*. A medida que α crece, se obtienen ciclos de período 8, 16, etc.

Este proceso genera una *cascada de duplicación de período*: una secuencia infinita de bifurcaciones flip en los valores $\alpha_{m(k)}$, con $m(k) = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, donde $m(k)$ es el período del ciclo que se bifurca a la k -ésima duplicación. El diagrama de bifurcación resultante es como en la figura 4.8.

La sucesión $\alpha_{m(k)}$ converge a un cierto valor α_∞ para el cual todas las (infinitas) órbitas periódicas existentes son inestables y se genera dinámica caótica. El conjunto invariante resultante pasa de ser un conjunto finito de puntos a un

conjunto infinito, pero confinado al intervalo compacto. Una órbita típica nunca se asienta ni en un punto fijo ni en una órbita periódica, sino que su comportamiento en el largo plazo es aperiódico. Cada una de esas órbitas aperiódicas es densa en un compacto y su comportamiento cualitativo es “errático”. Este proceso gobernado por una secuencia de bifurcaciones flip se conoce como *ruta al caos por duplicación de período*. Este es uno de los caminos “universales” al caos y se puede hallar en muchos sistemas.

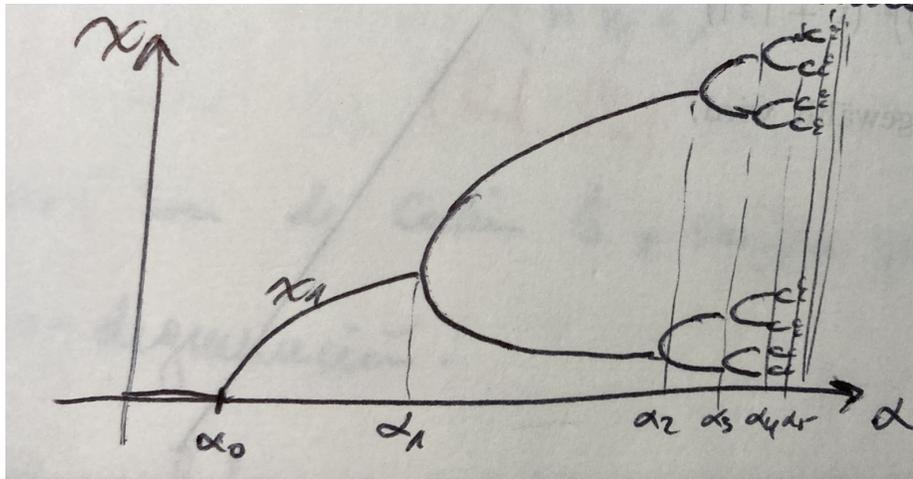


Figura 4.8: Cascada de duplicación de período en la ecuación de Ricker.

4.3. Bifurcación Neimark-Sacker

Consideremos el siguiente sistema discreto bidimensional que depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el parámetro; $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$, $d(0) \neq 0$. El sistema (4.3) tiene un punto fijo $(x_1, x_2) = (0, 0)$ para

todo α , con matriz Jacobiana

$$A = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y valores propios $\mu_{1,2} = (1 + \alpha) \exp(\pm i\theta)$. Luego, el mapeo (4.3) es invertible cerca del origen para todo $|\alpha|$ pequeño. Más aún, cuando $\alpha = 0$, se tiene $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$, con $|\mu_{1,2}| = 1$; luego, el origen es un punto fijo no-hiperbólico.

Introduciendo una variable compleja $z = x_1 + ix_2$, y reescribiendo (4.3) en notación polar $z = \rho \exp(i\varphi)$, luego de un poco de operatoria obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho(1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2) + R_\alpha(\rho), \\ \varphi \mapsto \varphi + \theta(\alpha) + Q_\alpha(\rho), \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $R_\alpha(\rho) = O(\rho^4)$ y $Q_\alpha(\rho) = O(\rho^2)$ son funciones suaves de (ρ, α) . Notemos que el mapeo para ρ es independiente de ϕ y define un sistema dinámico con un punto fijo en $\rho = 0$ para todo α . Este punto fijo es estable si $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. En la transición, cuando $\alpha = 0$, la estabilidad del origen depende del signo del coeficiente $d(0)$. En lo que sigue, supongamos que $d(0) < 0$; en tal caso, el origen es un punto fijo estable no-hiperbólico si $\alpha = 0$. Además, si $\alpha > 0$, en una vecindad del origen, el mapeo para ρ posee otro punto fijo dado por

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + O(\alpha). \quad (4.5)$$

Por continuidad, tenemos que $d(\alpha) < 0$ y ρ_0 es estable para todo $|\alpha|$ pequeño.

Por otro lado, el mapeo para φ describe una rotación por un ángulo que depende de φ y θ ; y es aproximadamente igual a $\theta(\alpha)$. Luego, al superponer los dos mapeos en ρ y φ , obtenemos el diagrama de bifurcación de la figura 4.9 para (4.3): Para $\alpha < 0$, el origen es un punto fijo atractor; las órbitas espiralean hacia $(0, 0)$. Para $\alpha > 0$ aparece un círculo invariante aislado de radio $\rho(\alpha)$ dado en (4.5). Esta curva invariante es única y atrayente. Todas las órbitas que comienzan afuera o adentro de la curva invariante cerrada, excepto el origen, tienden a la curva bajo iteraciones de (4.3). Decimos que el sistema pasa por una *bifurcación Neimarck-Sacker supercrítica*.

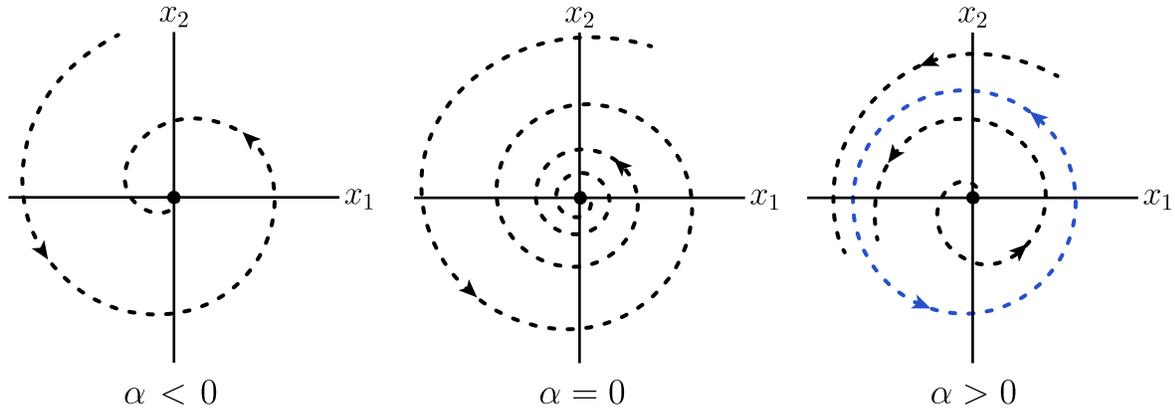


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker supercrítica ($d(0) < 0$).

La bifurcación también puede presentarse en el espacio (x_1, x_2, α) . La familia de curvas cerradas invariantes que aparece, parametrizada por α , forma una superficie paraboloides.

El caso $d(0) > 0$ se puede analizar de la misma forma: Existe una curva invariante cerrada inestable que desaparece cuando α cruza el cero desde los valores negativos a los positivos como en la figura 4.10. En tal caso, uno habla de una *bifurcación Neimark-Sacker subcrítica*. Al igual que con las bifurcaciones de Hopf y flip, el tipo de bifurcación (supercrítica o subcrítica) está determinado por la estabilidad del punto fijo en el valor de bifurcación del parámetro.

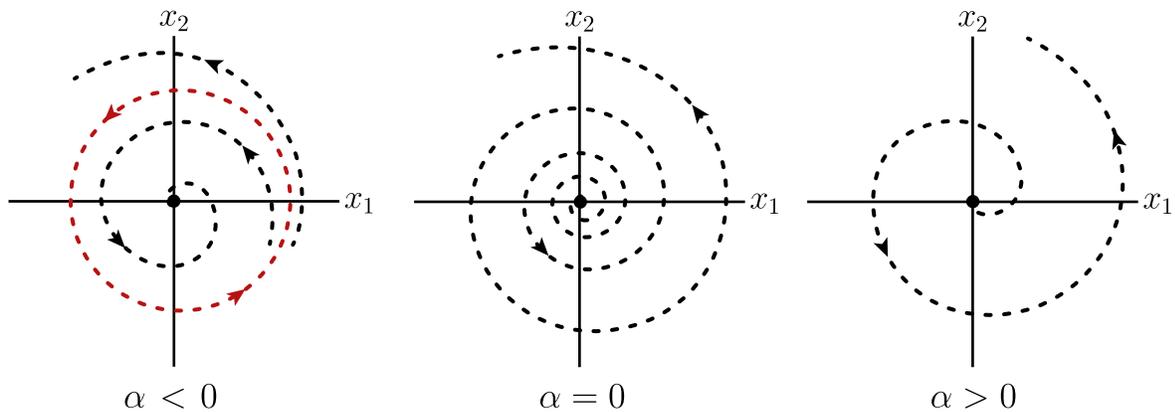


Figura 4.10: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker subcrítica ($d(0) > 0$).

La estructura de órbitas de (4.4) en el círculo invariante depende de si la razón entre el ángulo de rotación $\Delta\varphi = \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)$ y 2π es racional o irracional en el círculo. Si es racional, *todas* las órbitas en la curva son *periódicas*. Más precisamente, si

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}$$

con enteros p y q , todos los puntos en la curva cerrada son ciclos de período q de la p -ésima iteración del mapeo. Por el contrario, si la razón es un número irracional, no hay órbitas periódicas y todas las órbitas son densas en el círculo.

Ahora agreguemos términos de orden superior al sistema (4.3). Por ejemplo, podemos pensar que (4.3) es una versión truncada de un mapeo que contiene términos de orden superior ($\|x\|^4$), los cuales dependen suavemente de α . En tal caso, sobre la curva invariante que se bifurca podrían haber puntos fijos y puntos periódicos. La existencia y estabilidad de estos puntos (i.e., el retrato de fase concreto del sistema restringido a la curva invariante) depende de estos términos de orden superior que no están presentes en (4.3). Por lo tanto, dos sistemas distintos exhibiendo una misma bifurcación Neimarck-Sacker podrían no ser topológicamente equivalentes. Este hecho impide obtener una forma normal para esta bifurcación. Sin embargo, de todas maneras podemos enunciar el siguiente teorema que nos asegura que estos términos ($\|x\|^4$) no afectan la bifurcación de la curva cerrada invariante en (4.3). Es decir, una curva invariante localmente única se bifurca del origen en la misma dirección y con la misma estabilidad que en (4.3).

Teorema 11 (*Bifurcación Neimarck-Sacker*) *Consideremos un sistema dinámico bidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave. Supongamos que para valores de α cerca de α^ el sistema posee un punto fijo $x(\alpha)$ cuya coordenada depende de α ; en particular, sea $x_0 = x(\alpha^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\alpha), \alpha)$ en la forma*

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha) \exp(\pm i\varphi(\alpha)).$$

Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(B1) \quad f(x_0, \alpha^*) = x_0;$$

(B2) $Df(x_0, \alpha^*)$ tiene un par de multiplicadores complejos conjugados sobre el círculo unitario $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm i\theta_0)$, ($r(\alpha^*) = 1, \varphi(\alpha^*) = \theta_0$);

$$(G1) \quad \frac{d}{d\alpha} r(\alpha^*) \neq 0;$$

$$(G2) \quad \exp(ik\theta_0) \neq 1, \text{ para } k = 1, 2, 3, 4.$$

Entonces, existe un cambio de coordenadas suave e invertible (difeomorfismo) y un cambio de parámetros suave e invertible que transforman el sistema, en una vecindad de (x_0, α^*) , en

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &+ (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4), \end{aligned}$$

donde $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$. Más aún, $\theta(\alpha^*) = \theta_0$ y $d(\alpha^*) = \operatorname{Re}(\exp(-i\theta_0)c_1(\alpha^*))$ (donde $c_1(\alpha^*)$ posee una fórmula que puede buscarse en textos sobre bifurcaciones!)

Si además, $d(\alpha^*) \neq 0$ (i.e., $c_1(\alpha^*) \neq 0$), entonces, existe una vecindad de x_0 en la cual se bifurca una única curva cerrada invariante desde x_0 a medida que α pasa por α^* .

Ejemplo 20 (Bifurcación Neimark-Sacker en la ecuación logística con retardo)
Considere la siguiente ecuación en recurrencia:

$$u_{k+1} = ru_k(1 - u_{k-1}).$$

Este es un modelo simple de dinámica poblacional, donde u_k representa la densidad de una población en el tiempo k , y r es la tasa de crecimiento. Aquí se asume que el crecimiento está determinado no solo por la densidad poblacional actual (u_k) sino también por su densidad en el pasado (u_{k-1}).

Si introducimos $v_k = u_{k-1}$, la ecuación se puede reescribir como

$$\begin{cases} u_{k+1} = ru_k(1 - v_k), \\ v_{k+1} = u_k, \end{cases}$$

lo cual, a su vez, define el sistema dinámico discreto bidimensional

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx_1(1-x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(x, r) \\ F_2(x, r) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$. El mapeo (4.6) tiene el punto fijo $(0, 0)^T$ para todos los valores de r . Para $r > 1$ aparece un punto fijo positivo no trivial x^0 en las coordenadas

$$x_1^0 = x_2^0 = 1 - \frac{1}{r}.$$

La matriz jacobiana de (4.6) evaluada en x^0 viene dada por

$$A(r) = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y tiene valores propios

$$\mu_{1,2}(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - 4}.$$

Si $r > \frac{5}{4}$, los valores propios son complejos y $|\mu_{1,2}|^2 = \mu_1\mu_2 = r - 1$. Por lo tanto, en $r = r_0 = 2$ el punto fijo no trivial pierde estabilidad y tenemos una bifurcación Neimark-Sacker. Los valores propios en r_0 son

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Luego, es claro que las condiciones (G1) y (G2) del teorema anterior se satisfacen. Utilizando las fórmulas para $d(r_0)$ disponibles en textos avanzados de teoría de bifurcaciones, es posible obtener $d(r_0) = -2 < 0$. Por lo tanto, una única curva invariante cerrada estable se bifurca desde el punto fijo no trivial para $r > 2$.

Capítulo 5

Bifurcaciones de equilibrios y órbitas periódicas en sistemas n -dimensionales

Hasta ahora hemos estudiado bifurcaciones en sistemas genéricos a un parámetro que ocurren en espacios de fase de la *menor dimensión posible*. Ahora veremos que estas mismas bifurcaciones ocurren esencialmente de la misma manera en sistemas genéricos n -dimensionales: todos los “eventos” asociados a una bifurcación ocurren en ciertas variedades invariantes (parámetro-dependientes) de dimensión 1 o 2, mientras que el comportamiento fuera de estas variedades es “trivial”, i.e., la dinámica es contractiva, o bien, expansiva. En otras palabras, esto nos permite reducir la dimensión de un sistema dado cerca de una bifurcación local al restringir el análisis a una variedad invariante apropiada. Estas variedades invariantes que capturan la esencia de las bifurcaciones en dimensiones mayores se llaman *variedades centrales* y son el primer tema de estudio en este capítulo.

5.1. Variedades centrales en sistemas a tiempo continuo

Comencemos con el *caso crítico*, i.e., al momento de una bifurcación local. Asumimos que los parámetros del sistema están fijos en sus valores de bifurcación, los cuales son aquellos valores para los cuales existe un equilibrio (o punto fijo) no hiperbólico. Aunque en este curso nos enfocaremos en el caso de sistemas a tiempo continuo, es posible obtener de manera similar los mismos conceptos y resultados para el caso discreto.

Considere un sistema dinámico a tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

donde X es un campo de vectores de clase C^r , $r \geq 2$, y $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Asumamos que los valores propios de $A = DX(\mathbf{0})$ son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y supongamos que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es un equilibrio no hiperbólico. Sean las siguientes cantidades:

- n_+ = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.
- n_0 = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.
- n_- = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Sea E^c el espacio propio (generalizado) de A asociado a los n_0 valores propios ubicados en el eje imaginario. Los valores propios con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ a veces se dicen *críticos*, al igual que el espacio propio E^c . Por último denotemos por φ^t al flujo asociado a (5.1). Bajo estas hipótesis tenemos el siguiente teorema.

Teorema 12 (*Teorema de la variedad central*) *Existe una variedad invariante, denotada por $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$, suave, n_0 -dimensional, definida localmente cerca de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, y tangente a E^c en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Más aún, existe una vecindad U de u_0 tal que si $\varphi^t(\mathbf{x}) \in U$ para todo $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), entonces*

$$\varphi^t(\mathbf{x}) \rightarrow W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) \quad \text{para } t \rightarrow \infty \quad (\text{resp. } t \rightarrow -\infty).$$

Definición 20 *La variedad $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ del teorema anterior se llama **variedad central** del equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.*

OBSERVACIONES.

1. $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ se puede extender globalmente al resto del espacio de fase al dejar evolucionar los puntos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ bajo el flujo. La variedad central global resultante se denota por $W^c(\mathbf{0})$.

2. La segunda afirmación del teorema dice que una órbita que se queda cerca del equilibrio para $t \geq 0$ (o $t \leq 0$) tiende hacia $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ en la correspondiente dirección del tiempo. Si por ejemplo $n_+ = 0$ y todas las órbitas en U permanecen en U para siempre, entonces $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es *atrayente*. Es decir, la variedad central *captura* toda la dinámica del sistema completo en una vecindad de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. En particular, si cerca de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ hay...

- otros equilibrios,
- órbitas periódicas,
- conexiones homo/heteroclínicas,

entonces todos estos elementos deben estar contenidos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

Por ejemplo, la figura 5.1 muestra la variedad central de un equilibrio no hiperbólico en el caso de una bifurcación fold en \mathbb{R}^2 y una bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3 . Todos los equilibrios y órbitas periódicas que se bifurquen al perturbar genéricamente estos sistemas estarán contenidos en una respectiva variedad central.

Exploremos con más detalle los resultados mencionados en las observaciones anteriores sobre el caso particular en que $n_+ = 0$. Supongamos que el campo de vectores (5.1) viene escrito en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

donde F representa los términos no lineales, i.e., $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $DF(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. La matriz P de vectores propios generalizados de A transforma A a su forma diagonal por bloques $J = P^{-1}AP$, donde

$$J = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Aquí, la matriz C tiene tamaño $n_0 \times n_0$ y todos sus valores propios tienen parte real nula; y la matriz S tiene tamaño $n_- \times n_-$ y todos sus valores propios tienen parte real negativa. Además, si A es diagonalizable, J es una matriz diagonal. Entonces definamos las nuevas coordenadas $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$ de manera que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= P^{-1}A\mathbf{x} + P^{-1}F(\mathbf{x}) = P^{-1}AP\mathbf{u} + P^{-1}F(P\mathbf{u}) \\ &= J\mathbf{u} + P^{-1}F(P\mathbf{u}). \end{aligned}$$

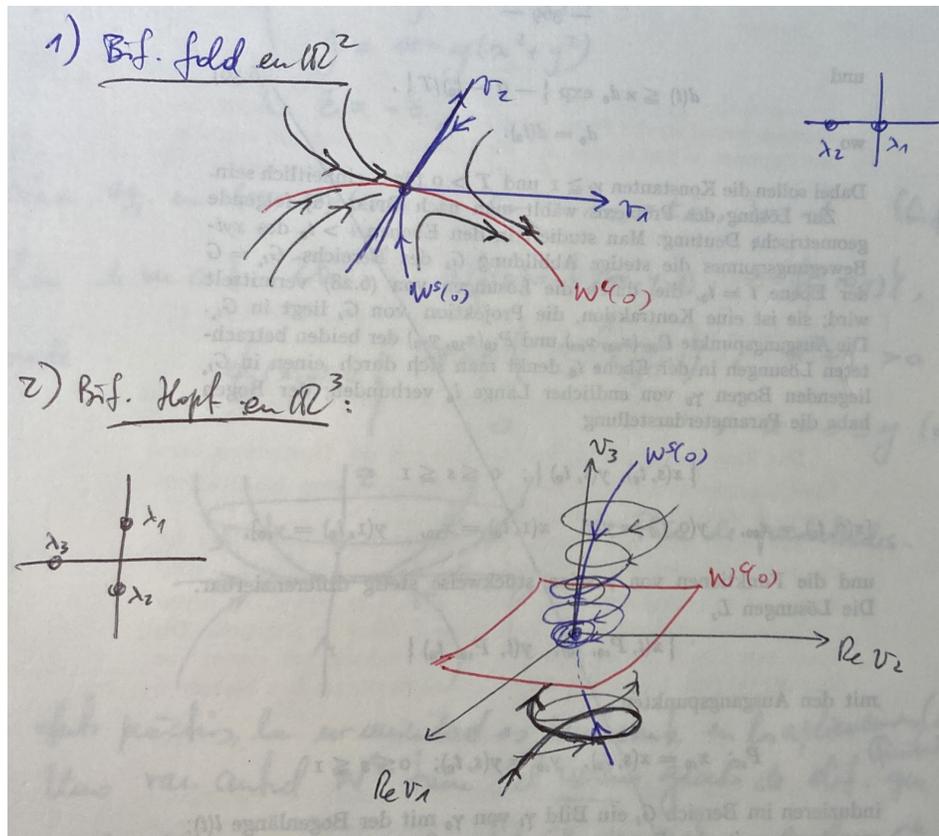


Figura 5.1:

Ahora definamos $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-}$. En términos de estos dos subconjuntos de variables, la EDO ahora toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, y), \\ \dot{y} = Sy + g(x, y), \end{cases} \quad (5.3)$$

donde $(f, g)^t = P^{-1} \circ F \circ P$. Las funciones f y g son de clase C^r , $r \geq 2$, y satisfacen $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = 0$ y $Dg(0, 0) = 0$. En este marco, el espacio propio E^c corresponde al hiperplano $E^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} : y = 0\}$, mientras que $E^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} : x = 0\}$.

Según el teorema 12, una variedad invariante de (5.3) será una variedad central si puede ser representada localmente como sigue:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que las condiciones $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ implican que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es tangente a E^c en $(0, 0)$. Más aún, dado que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante, la dinámica de (5.3) restringida a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ está dada por el campo n_0 -dimensional

$$\dot{u} = Cu + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}. \quad (5.4)$$

Este es un campo definido sobre la gráfica de la función $y = h(x)$ y corresponde a la restricción de (5.3) a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

El siguiente teorema implica que la dinámica de (5.4) cerca de $u = 0$ determina la dinámica de (5.3) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 13 (*Estabilidad*)

- i) Supongamos que $u = 0$ en el sistema (5.4) es estable (o asintóticamente estable) (resp. inestable). Entonces el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ es también estable (o asintóticamente estable) (resp. inestable).*
- ii) Supongamos que $u = 0$ en el sistema (5.4) es estable. Si $(x(t), y(t))$ es una solución de (5.3) con $(x(0), y(0))$ suficientemente cerca de $(0, 0)$, entonces existe una solución $u(t)$ de (5.4) tal que cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene:*

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}), \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

La parte ii) del teorema anterior es equivalente a lo que se enuncia en el teorema 12: Para condiciones iniciales del sistema completo (5.3) suficientemente cerca del origen, las órbitas se acercan asintóticamente a una órbita de la variedad central. En este caso la variedad es “atrayente”. Como consecuencia, si existen otros puntos de equilibrio suficientemente cerca de $(0, 0)$ u órbitas periódicas cerca de $(0, 0)$, éstos deben estar contenidos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

¿Cómo obtenemos una representación de $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ (i.e., de la función h) para poder beneficiarnos de estos teoremas? Como $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante bajo (5.4),

vamos a derivar una EDP que la función h debe satisfacer. Derivando la ecuación $y = h(x)$ con respecto a t obtenemos:

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}.$$

Sustituyendo $y = h(x)$ en (5.3):

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h(x)), \\ \dot{y} = Sh(x) + g(x, h(x)), \end{cases}$$

o bien,

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h(x)), \\ Dh(x)\dot{x} = Sh(x) + g(x, h(x)). \end{cases}$$

De aquí obtenemos:

$$Dh(x)(Cx + f(x, h(x))) = Sh(x) + g(x, h(x)).$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{N}(h(x)) := Dh(x)(Cx + f(x, h(x))) - Sh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (5.5)$$

Esta es una EDP que $h(x)$ debe satisfacer para que su gráfica sea una variedad central. Sin embargo, probablemente es más difícil resolver esta EDP que nuestro problema original. Afortunadamente, el siguiente teorema nos da un método para calcular una solución aproximada de la EDP.

Teorema 14 (*Aproximación*) Sea $\phi : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-}$ una función C^1 con $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$, tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = O(|x|^q)$, cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces,

$$|h(x) - \phi(x)| = O(|x|^q),$$

cuando $x \rightarrow 0$.

Este teorema nos permite calcular la variedad central hasta cualquier grado deseado de precisión al resolver la ecuación (5.5) en una expansión polinomial hasta el mismo grado de precisión deseado.

Ejemplo 21 Considere el campo de vectores

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y - x^5, \\ \dot{y} = -y + x^2, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El origen es un equilibrio cuya matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. Luego, $(0, 0)$ es no hiperbólico. En particular, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar la dinámica en una vecindad del origen.

Notemos que el sistema ya tiene la forma (5.3). Sabemos que existe la variedad central $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$, la cual puede ser aproximada localmente como sigue:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que $E^c = \langle(1, 0)\rangle$. Supongamos que $h(x)$ tiene la forma

$$y = h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4),$$

donde a, b son coeficientes por determinar. Luego,

$$Dh(x) = h'(x) = 2ax + 3bx^2 + O(x^3).$$

Por otro lado, el sistema tiene la forma general

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Luego, al restringir esta ecuación a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))},$$

si $P(x, y) \neq 0$. Luego, la ecuación (5.5) queda expresada como

$$\mathcal{N}(h(x)) = h'(x)P(x, h(x)) - Q(x, h(x)) = 0,$$

o equivalentemente,

$$(2ax + 3bx^2 + O(x^3))(ax^4 + bx^5 - x^5 + O(x^6)) + ax^2 + bx^3 - x^2 + O(x^4) = 0.$$

Se desprende que los coeficientes de cada potencia de x deben todos anularse. Así,

- Para x^2 : $a - 1 = 0$. Luego, $a = 1$.
- Para x^3 : $b = 0$.
- etc.

Por lo tanto,

$$h(x) = x^2 + O(x^4).$$

La restricción del campo de vectores a $W^c(\mathbf{0})$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u^2 h(u) - u^5 \\ &= u^2 (u^2 + O(u^4)) - u^5. \end{aligned}$$

Luego, la dinámica unidimensional sobre $W^c(\mathbf{0})$ está definida por:

$$\dot{u} = u^4 + O(u^5).$$

Para u suficientemente pequeño y $u \neq 0$, se tiene $\dot{u} > 0$. Luego, en \mathbb{R}^2 el retrato de fase en una vecindad del origen es como en la figura 5.2. El origen posee un sector atractor ($x < 0$) y dos sectores hiperbólicos ($x > 0$). Además, $(0, 0)$ es inestable en sentido Lyapunov.

OBSERVACIONES.

1. El teorema 13 de estabilidad implica que las órbitas que convergen a $(0, 0)$ lo hacen tangentes a $W^c(\mathbf{0})$ tal como se ilustra en la figura 5.2.
2. En general, no es posible aproximar $W^c(\mathbf{0})$ mediante su linealización E^c . En el ejemplo anterior, supongamos que asumimos $h(x) \equiv 0$, i.e., $W^c(\mathbf{0}) = E^c$. Luego, la restricción del campo a $E^c = \{y = 0\}$ es $\dot{u} = -u^5$. Para este campo unidimensional, el origen es asintóticamente estable; luego, el sistema completo 2D también tendría en $(0, 0)$ un equilibrio atractor, lo cual es una conclusión errónea a la luz de los resultados del ejemplo.

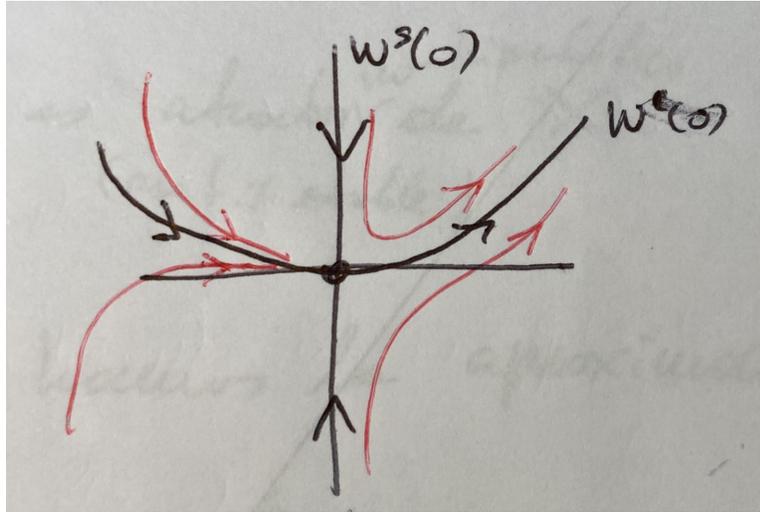


Figura 5.2:

3. $W^c(\mathbf{0})$ podría no ser única. El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

tiene un equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ con $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. El sistema posee una familia de variedades centrales —mostradas en la Figura 5.3:

$$W_\beta^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) : y = \psi_\beta(x)\},$$

donde

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \beta \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{para } x < 0, \\ 0 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

4. Una variedad central W^c tiene el mismo grado de suavidad *finita* que el campo (5.1) (si $X \in C^k$ con k finito, W^c es también una C^k -variedad) en alguna vecindad U del equilibrio. Sin embargo, a medida que $k \rightarrow \infty$ la vecindad U puede achicarse, resultando en la no existencia de una variedad W^c de clase C^∞ para algunos sistemas C^∞ .
5. El método de aproximación de $W^c(\mathbf{0})$ mediante series de potencias también se puede ocupar para hallar aproximaciones locales de las variedades estable

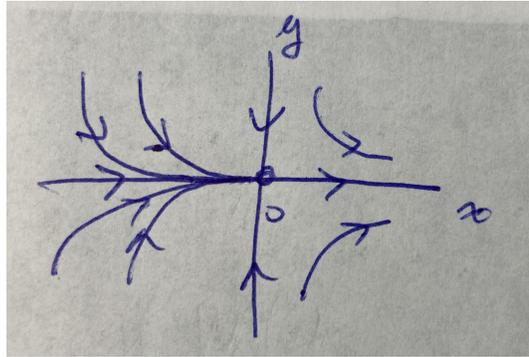


Figura 5.3:

W^s e inestable W^u de un equilibrio. Por ejemplo, para el sistema (5.3), la variedad estable local del origen queda expresada como:

$$W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : x = h(y), |y| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Es decir, $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0})$ es localmente la gráfica de una función sobre E^s . De esta manera, podemos buscar h de la forma: $h(y) = ay^2 + by^3 + cy^4 + O(y^5)$, donde los coeficientes a, b, c son tales que: $\dot{x} = Dh(y)\dot{y}$, es decir,

$$Dh(y) (Sy + g(h(y), y)) = Ch(y) + g(h(y), y).$$

Ejemplo 22 Consideremos el sistema general

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que el origen es un equilibrio no hiperbólico cuya matriz jacobiana posee los valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ con vectores propios asociados $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)$. Luego, existe una variedad central tangente a la recta $E^c = \{(x, y) | y = x\}$ en $(0, 0)$ como en la Figura 5.4.

Por definición:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, h'(0) = 1\},$$

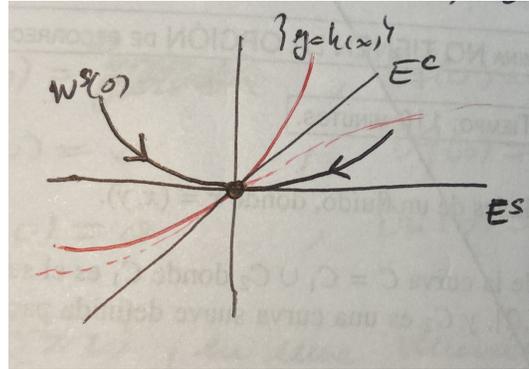


Figura 5.4:

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que la condición $h'(0) = 1$ asegura que $W_{loc}^c(\mathbf{0})$ es tangente a E^c en el origen. Busquemos $h(x)$ de la forma

$$y = h(x) = ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4),$$

donde a, b, c son coeficientes por determinar. Notemos que $h(0) = 0$ se satisface trivialmente, mientras que $h'(0) = 1$ si y solo si $a = 1$. Luego procedemos igual que en los ejemplos anteriores para hallar los coeficientes b, c . Es decir, planteamos

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))},$$

de donde obtenemos que

$$(1 + 2bx + 3cx^2 + O(x^3))P(x, h(x)) - Q(x, h(x)) = 0.$$

Igualando los coeficientes de cada potencia a cero encontramos los valores de b, c . Posteriormente, podemos analizar la restricción del sistema a $W_{loc}^c(\mathbf{0})$ y determinamos la (in)estabilidad de $x = 0$.

5.2. Inclusión de direcciones inestables

Supongamos que tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, y, z), \\ \dot{y} = Sy + g(x, y, z), \\ \dot{z} = Uz + h(x, y, z), \end{cases} \quad (5.6)$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$, donde $f(0, 0, 0) = 0$, $g(0, 0, 0) = 0$, $h(0, 0, 0) = 0$, $Df(0, 0, 0) = 0$, $Dg(0, 0, 0) = 0$ y $Dh(0, 0, 0) = 0$, y $f, g, h \in C^r$, $r \geq 2$, en una vecindad del origen. Aquí, la matriz C tiene tamaño $n_0 \times n_0$ y todos sus valores propios tienen parte real nula; la matriz S tiene tamaño $n_- \times n_-$ y todos sus valores propios tienen parte real negativa; y la matriz U tiene tamaño $n_+ \times n_+$ y todos sus valores propios tienen parte real positiva. Luego, el origen posee una variedad central $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ n_0 -dimensional, una variedad estable $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0})$ n_- -dimensional y una variedad inestable $W_{\text{loc}}^u(\mathbf{0})$ n_+ -dimensional.

La variedad central puede representarse localmente como el gráfico de una función suave

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+} : y = h_1(x), z = h_2(x), |x| < \delta, h_i(0) = 0, Dh_i(0) = 0, i = 1, 2\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. El campo (5.6) restringido a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ queda de la forma

$$\dot{u} = Cu + f(u, h_1(u), h_2(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}.$$

Dado que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante bajo (5.6) obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = Dh_1(x)\dot{x} = Sh_1(x) + g(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{z} = Dh_2(x)\dot{x} = Uh_2(x) + h(x, h_1(x), h_2(x)), \end{cases}$$

lo cual nos lleva a las siguientes ecuaciones para h_1 y h_2 :

$$\begin{cases} Dh_1(x)(Cx + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Sh_1(x) - g(x, h_1(x), h_2(x)) = 0, \\ Dh_2(x)(Cx + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Uh_2(x) - h(x, h_1(x), h_2(x)) = 0. \end{cases}$$

Al igual que en el caso $n_+ = 0$, podemos resolver este sistema de EDPs en forma aproximada a través de expansiones en series de potencias.

Teorema 15 (*Principio de reducción*) *El sistema (5.6) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = Sy, \\ \dot{z} = Uz. \end{cases} \quad (5.7)$$

Si hay más de una variedad central, entonces todos los sistemas resultantes (5.7) con diferentes (h_1, h_2) son localmente equivalentes.

Notemos que las ecuaciones en (5.7) están desacopladas. La primera ecuación es la restricción de (5.6) a su variedad central. Luego, la dinámica del sistema estructuralmente inestable (5.6) queda determinada por esta restricción pues las ecuaciones para (y, z) en (5.7) son lineales y tienen soluciones exponencialmente crecientes/decrecientes. En otras palabras, gracias al Principio de Reducción, el problema de analizar (5.6) cerca del origen se *reduce* de dimensión pues depende esencialmente solo del primer subsistema en (5.7), el cual es de menor dimensión (n_0 -dimensional, de hecho) que el sistema completo.

Las últimas componentes de (5.7) se pueden reemplazar por la ecuación de una *silla estándar*:

$$\begin{cases} \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases}$$

donde $(y, z) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$. Por lo tanto, el Principio de Reducción se puede expresar en forma equivalente como: “Cerca de un equilibrio no hiperbólico, el sistema es localmente topológicamente equivalente a la *suspensión* de su restricción a la variedad central por la silla estándar.”

5.3. Variedades centrales en sistemas dinámicos parámetro-dependientes

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Supongamos que en $\alpha = 0$ el sistema tiene un equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$ con n_0 valores propios en el eje imaginario y $n_- + n_+ = n - n_0$ valores propios con parte real no nula. Consideremos el sistema extendido

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

donde $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Notemos que el sistema (5.9) podría ser no lineal, incluso si el sistema original (5.8) fuese lineal.

Sea la matriz jacobiana de (5.9) en $(x_0, \alpha^*) = (0, 0)$:

$$J = \begin{pmatrix} D_x f(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz J es de tamaño $(n + 1) \times (n + 1)$ y posee $n_0 + 1$ valores propios en el eje imaginario y $n - n_0$ valores propios con parte real no nula. Luego podemos aplicar el teorema de la variedad central al sistema (5.9). De esta manera:

1. Existe una variedad central $\mathcal{W}^c \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, con $\dim \mathcal{W}^c = n_0 + 1$.
2. \mathcal{W}^c es tangente en $(0, 0)$ al espacio propio (generalizado) de J correspondiente a los $n_0 + 1$ valores propios con parte real nula.

Dado que $\dot{\alpha} = 0$, todos los hiperplanos n_0 -dimensionales

$$\Pi_{\alpha_0} = \{(\alpha, x) : \alpha = \alpha_0\}$$

son invariantes con respecto a (5.9). Por lo tanto, la variedad \mathcal{W}^c esta *foliada* por variedades invariantes n_0 -dimensionales

$$W_\alpha^c = \mathcal{W}^c \cap \Pi_\alpha.$$

Decimos que la colección $\{W_\alpha^c\}$ es una *foliación* de \mathcal{W}^c donde cada variedad W_α^c es una *hoja*, es decir, \mathcal{W}^c queda “parametrizado” por una familia de variedades invariantes disjuntas.

Lema 6 *El sistema (5.8) posee una familia de variedades centrales locales W_α^c que depende de un parámetro. Si $n_+ = 0$, cada una de estas variedades es atrayente.*

Ejemplo 23 Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^3 + y^2, \\ \dot{y} = -y + x^2, \end{cases} \quad (5.10)$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. La matriz jacobiana en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ es

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

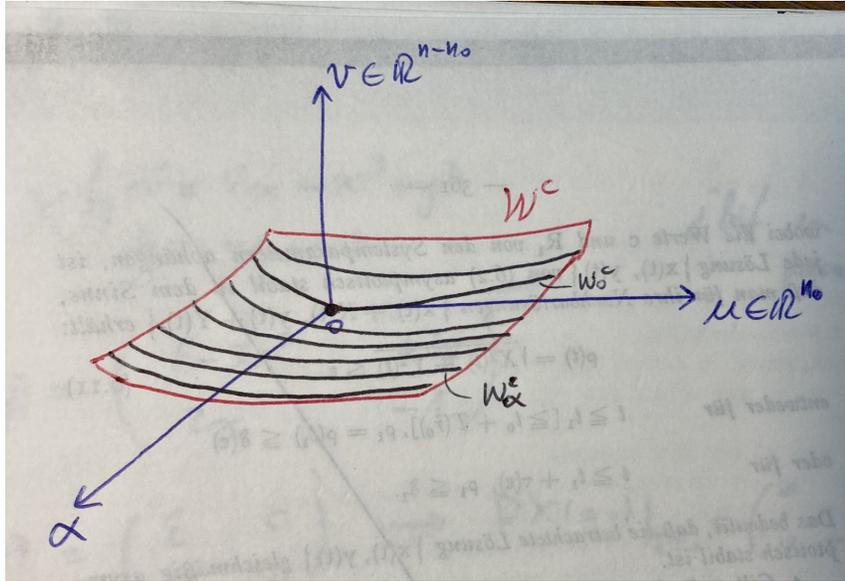


Figura 5.5:

por lo tanto, el origen es un equilibrio no-hiperbólico si $\alpha = 0$. ¿Qué bifurcación está ocurriendo cuando $\alpha = 0$? Consideremos el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x - x^3 + y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Simplemente para ser consistentes con nuestra presentación de la teoría y para efectos pedagógicos, reescribamos (5.11) en su forma normal estándar (5.6). (De todas maneras, este ejemplo es lo suficientemente sencillo como para haber proseguido sin este paso intermedio.) De esta manera tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x - x^3 + y^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Podemos aplicar directamente la teoría de la variedad central a (5.12) para examinar la dinámica de (5.10). Por lo tanto existe una variedad estable W^s 1-dimensional tangente al subespacio $E^s = \{(x, y, \alpha) \mid x = 0, \alpha = 0\}$, y una variedad central W^c 2-dimensional tangente a $E^c = \{(x, y, \alpha) \mid y = 0\}$.

Podemos analizar la dinámica del sistema extendido restringiéndonos a cada una de las variedades centrales W_α^c para α suficientemente pequeño. Sea

$$W_\alpha^c = \{(x, y, \alpha) \mid y = \varphi(x, \alpha), x, \alpha \in (-\delta, \delta)\},$$

donde $\varphi(0, 0) = 0$, $D\varphi(0, 0) = 0$. Derivando con respecto a t y ocupando regla de la cadena obtenemos

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\alpha x - x^3 + y^2).$$

Pero $\dot{y} = -y + x^2$, luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} (\alpha x - x^3 + (\varphi(x, \alpha))^2) = -\varphi(x, \alpha) + x^2.$$

Expandiendo φ en serie de Taylor con respecto a (x, α) en $(x_0, \alpha^*) = (0, 0)$ tenemos $\varphi(x, \alpha) = ax^2 + bx\alpha + c\alpha^2 + \dots$, luego

$$(2ax + b\alpha + \dots) (\alpha x - x^3 + (\varphi(x, \alpha))^2) = -(ax^2 + bx\alpha + c\alpha^2 + \dots) + x^2.$$

Igualando coeficientes de los polinomios a ambos lados de esta expresión se obtiene $a = b = c = 0$. Por lo tanto, $\varphi(x, \alpha) = O(|(x, \alpha)|^3)$. Luego, la restricción del sistema a W_α^c viene dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^3 + (\varphi(x, \alpha))^2 = \alpha x - x^3 + O(|(x, \alpha)|^6), \\ \dot{\epsilon} = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la dinámica se reduce a

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + O(|(x, \alpha)|^6), \quad x \in \mathbb{R},$$

para cada $\alpha \in (-\delta, \delta)$ fijo. ¿Qué bifurcación crees que está sucediendo en la restricción a W^c a medida que α pasa por $\alpha^* = 0$?

OBSERVACIONES:

1. Cada hoja W_α^c también es llamada una variedad central para cada α fijo.
2. W_0^c corresponde a una variedad central de (5.9) en $\alpha = 0$ y coincide con la noción de variedad central usual para (5.8).

Procedimiento general. En el ejemplo anterior, la parte lineal del sistema extendido (5.12) se encontraba ya en su forma de Jordan (5.6) por lo que pudimos aplicar directamente la teoría de la variedad central para examinar la dinámica de (5.10). Claramente, esto puede que *no sea* el caso en un sistema general y queremos considerar este asunto en esta parte.

Consideremos el campo de vectores de clase C^r , (con $r > 1$ tan grande como sea necesario):

$$\dot{z} = F(z, \alpha), \quad (z, \alpha) \in \mathbb{R}^{n_0+n_-} \times \mathbb{R}^p. \quad (5.13)$$

Supongamos que $(z, \alpha) = (0, 0)$ es un equilibrio de (5.13) y que la matriz

$$D_z F(0, 0)$$

posee n_0 valores propios con parte real y n_- valores propios con parte real negativa. Reescribamos (5.13) como expansión en serie de Taylor de (5.13) con respecto a (z, α) :

$$\dot{z} = D_z F(0, 0)z + D_\alpha F(0, 0)\alpha + G(z, \alpha), \quad (5.14)$$

donde

$$G(z, \alpha) = F(z, \alpha) - D_z F(0, 0)z - D_\alpha F(0, 0)\alpha = O(|(z, \alpha)|^2).$$

Note que aparece el término “ $D_\alpha F(0, 0)\alpha$ ” en (5.14). Denotemos como

$$\begin{aligned} M &= D_z F(0, 0) && \text{matriz } (n_0 + n_-) \times (n_0 + n_-), \\ \Lambda &= D_\alpha F(0, 0) && \text{matriz } (n_0 + n_-) \times p, \end{aligned}$$

de manera que (5.14) queda como

$$\dot{z} = Mz + \Lambda\alpha + G(z, \alpha). \quad (5.15)$$

Sea T la matriz cambio de base de tamaño $(n_0 + n_-) \times (n_0 + n_-)$ que coloca a M en su forma diagonal por bloques de Jordan

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

donde C es una matriz $n_0 \times n_0$ con todos sus valores propios con parte real cero y S es una matriz $n_- \times n_-$ con todos sus valores propios con parte real negativa. Haciendo entonces la transformación lineal de coordenadas

$$z = Tw, \quad w = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-},$$

y aplicándola a (5.15), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \bar{\Lambda}\alpha + \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= T^{-1}\Lambda, \\ \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix} &= T^{-1}G(T(x, y), \alpha). \end{aligned}$$

Note que $f(0, 0, 0) = 0$, $g(0, 0, 0) = 0$, $Df(0, 0, 0) = 0$, y $Dg(0, 0, 0) = 0$. A continuación, escribamos

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_c \\ \bar{\Lambda}_s \end{pmatrix},$$

donde $\bar{\Lambda}_c$ corresponde a las primeras n_0 filas de $\bar{\Lambda}$, y $\bar{\Lambda}_s$ corresponde a las últimas n_- filas de $\bar{\Lambda}$. Entonces, (5.15) se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \bar{\Lambda}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_s & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ 0 \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Notemos que (5.16) tiene *casi* la forma normal estándar (5.6) para aplicar la teoría de la variedad central. El paso final sería introducir una transformación de coordenadas lineal que diagonalice por bloques la parte lineal de (5.16) en una matriz $(n_0 + p) \times (n_0 + p)$ con todos sus valores propios con parte real cero (y p idénticamente cero) y una matriz con todos los valores propios con parte real negativa.

5.4. Variedades centrales en bifurcaciones de sistemas n -dimensionales

Consideremos nuevamente el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Supongamos que en $\alpha = 0$ el sistema tiene un equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$ con n_0 valores propios en el eje imaginario y $n_- + n_+ = n - n_0$ valores propios con parte real no nula. Generalizando lo realizado en la sección anterior, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño y fijo podemos restringir el sistema (5.17) a la variedad central correspondiente W_α^c . La restricción de (5.17) a W_α^c es de la forma

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

En $\alpha = 0$ el sistema (5.18) es equivalente a la restricción de (5.17) a su variedad central W_0^c y puede ser calculada explícitamente hasta términos de cualquier orden finito para todas las bifurcaciones de codimensión uno.

El siguiente teorema nos dice que todos los *eventos esenciales* cerca de una bifurcación ocurren en la variedad invariante W_α^c y son capturados por el sistema n_0 -dimensional (5.18) (con $n_0 < n$). Es decir, todos los eventos asociados a la bifurcación *se manifiestan* completamente en la restricción (5.18) de (5.17) a su variedad central.

Teorema 16 *El sistema (5.17) es localmente topológicamente equivalente al sistema n_0 -dimensional (5.18) acoplado con n_- direcciones hiperbólicas atrayentes y n_+ direcciones hiperbólicas repulsoras adicionales. Más aún, (5.18) puede reemplazarse por cualquier otro sistema localmente topológicamente equivalente.*

Corolario 1 *El sistema (5.17) es localmente topológicamente equivalente a la suspensión de (5.18) por la silla estándar*

$$\begin{cases} \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases}$$

donde $(y, z) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$.

Un teorema similar se puede formular para sistemas dinámicos discretos y para sistemas con más de un parámetro.

Ejemplo 24 (*Bifurcación silla-nodo genérica en \mathbb{R}^2*) Supongamos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que para $\alpha = 0$, el origen $x^* = 0$ es un equilibrio con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Entonces existe una variedad invariante atractora W_α^c 1-dimensional y suave para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

En $\alpha = 0$ la restricción a W_0^c tiene la forma

$$\dot{u} = bu^2 + O(u^3).$$

¿Cuál es la restricción a W_α^c para $\alpha \neq 0$ pequeño? Si $b \neq 0$ y si la ecuación restringida depende genéricamente en el parámetro α , entonces la restricción a W_α^c es localmente topológicamente equivalente a la forma normal topológica de la bifurcación silla-nodo

$$\dot{u} = \alpha + \sigma u^2,$$

donde $\sigma = \text{sign}(b) = \pm 1$. Bajo estas condiciones, el teorema anterior implica que el sistema original es localmente topológicamente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha + \sigma u^2, \\ \dot{v} = -v, \end{cases} \tag{5.19}$$

el cual es un sistema desacoplado con los retratos de fase como los de la figura 5.6. Aquí, en (5.19) podríamos tomar W_α^c como la recta $\{v = 0\}$, es decir, estas variedades invariantes coinciden con el eje horizontal para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Sin embargo, podrían considerarse otras variedades centrales.

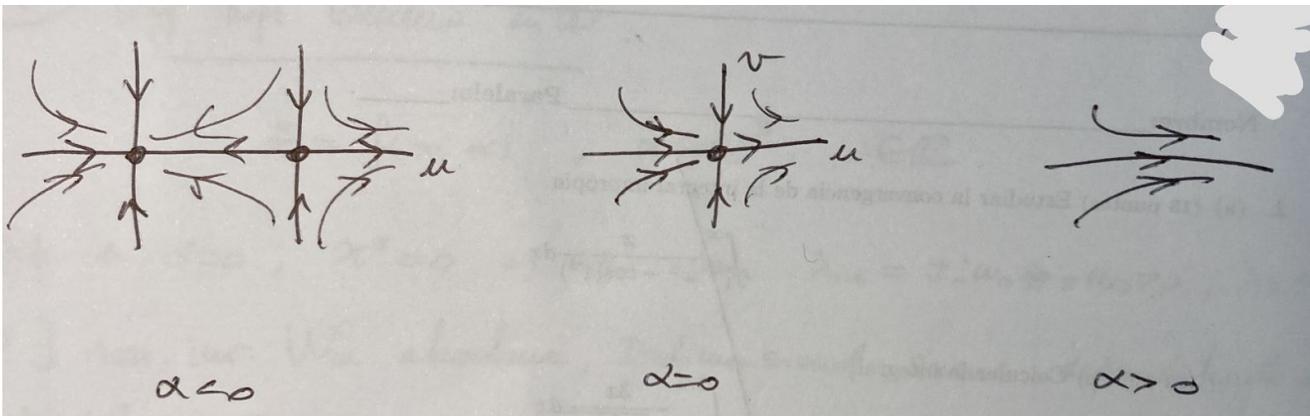


Figura 5.6: Retratos de fase de (5.19) en el caso $\sigma > 0$.

Los mismos eventos del sistema (5.19) ocurren en el sistema original en alguna variedad invariante 1-dimensional α -dependiente, que sea localmente atrayente. Además, todos los puntos de equilibrio que participan en la bifurcación silla-nodo están contenidos en esta variedad; ver figura 5.7.

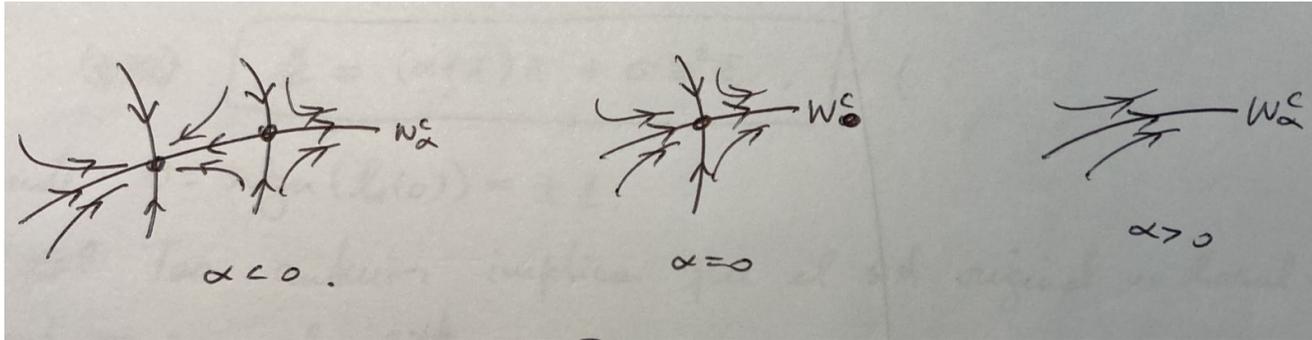


Figura 5.7: Retratos de fase de la bifurcación silla-nodo en el sistema original (5.19).

Estas figuras también explican por qué la bifurcación fold genérica también se conoce como **silla-nodo**. Los casos $\lambda_2 > 0$ y el caso n -dimensional se pueden generalizar de manera natural.

Ejemplo 25 (*Bifurcación de Hopf genérica en \mathbb{R}^3*) Supongamos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que para $\alpha = 0$, el origen $x^* = 0$ es un equilibrio con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, con $\omega_0 > 0$, y $\lambda_3 < 0$. Entonces existe una variedad invariante atrayente W_α^c 2-dimensional y suave para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

En $\alpha = 0$ la ecuación restringida a W_0^c se puede escribir en forma compleja

$$\dot{z} = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si el coeficiente de Lyapunov $l_1(0)$ de esta ecuación es no nulo y si la ecuación depende genéricamente en el parámetro α , entonces el sistema restringido a W_α^c es localmente topológicamente equivalente a la forma normal topológica

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \bar{z},$$

donde $\sigma = \text{sign}(l_1(0)) = \pm 1$. Por lo tanto, el teorema anterior implica que el sistema original completo es localmente topológicamente equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \bar{z}, \\ \dot{v} = -v, \end{cases}$$

con retratos de fase como los de la figura 5.8 (en el caso supercrítico, i.e, para $\sigma < 0$).

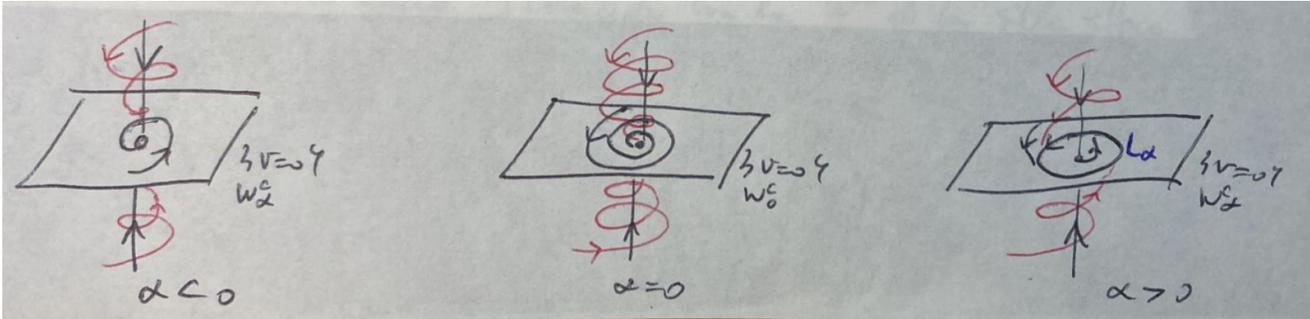


Figura 5.8: Retratos de fase de la forma normal de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3 con una dirección estable adicional en el caso supercrítico, i.e, para $\sigma < 0$.

La bifurcación de Hopf supercrítica toma lugar en el plano invariante $v = 0$, el cual es atrayente. En las coordenadas originales, los mismos eventos ocurren en una variedad atrayente 2-dimensional W_α^c como en la figura 5.9.

Esta construcción permite una generalización a cualquier dimensión arbitraria.

COMENTARIOS.

1. En ambos ejemplos anteriores, la familia de variedades W_α^c no es única. Sin embargo, todos los equilibrios y órbitas periódicas que se bifurcan pertenecen a cualquiera de las posibles variedades centrales. En el caso de la bifurcación fold, la variedad W_α^c es única cerca del punto silla (siempre que exista) y coincide con su variedad inestable W^u ; la unicidad se pierde en el nodo estable; ver figura 5.7.

La figura 5.10 ilustra una representación radial del caso de la bifurcación de Hopf supercrítica para $\alpha > 0$. La variedad W_α^c es única y coincide con la variedad inestable W^u del punto silla-foco hasta el ciclo L_α , en donde se rompe la unicidad.

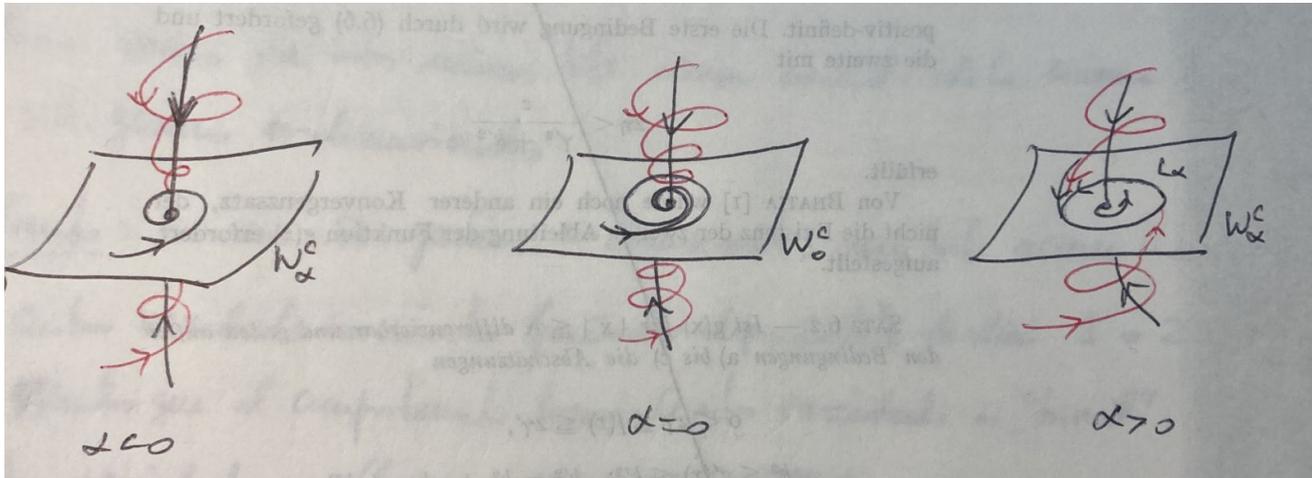


Figura 5.9: Retratos de fase de la bifurcación de Hopf en el sistema original.

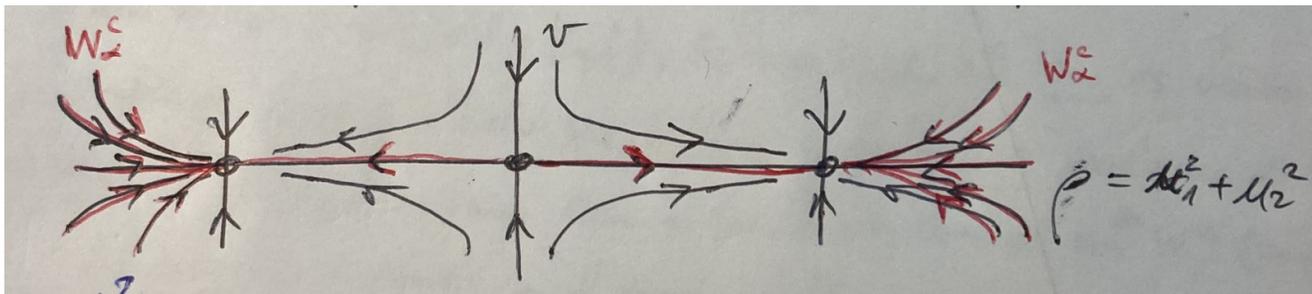


Figura 5.10: Representación radial del caso $\alpha > 0$ para la bifurcación de Hopf supercrítica. La variedad W_α^c es única y coincide con la variedad inestable W^u del punto silla-foco hasta el ciclo L_α , en donde se rompe la unicidad.

- Definiciones y análisis análogos se pueden tener para bifurcaciones de puntos fijos y puntos periódicos de sistemas dinámicos discretos.

5.5. Bifurcaciones de ciclos límite

Las órbitas periódicas también pueden pasar por bifurcaciones. En este caso, podemos aplicar una combinación de la teoría de la variedad central y del mapeo de Poincaré para estudiar bifurcaciones de ciclos límite en sistemas n -dimensionales. Sea L_0 una órbita periódica aislada del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \alpha), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

para $\alpha = 0$. Sea P_α la aplicación de retorno de Poincaré para $|\alpha|$ pequeño:

$$P_\alpha : \Sigma \longrightarrow \Sigma,$$

donde Σ es una sección transversal local a L_0 . Si introducimos coordenadas locales $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ en Σ , entonces $\tilde{\xi} = P_\alpha(\xi)$ se define como el punto de la siguiente intersección con Σ de la órbita de f que tiene punto inicial con coordenadas ξ en Σ . La intersección de Σ con L_0 nos da un punto fijo ξ_0 para P_0 : $P_0(\xi_0) = \xi_0$. Además, se puede probar que el mapeo P_α es suave y localmente invertible para $|\alpha|$ pequeño.

Supongamos que el ciclo L_0 es no hiperbólico con n_0 multiplicadores en el círculo unitario. Los teoremas de la variedad central nos dan una variedad invariante parámetro-dependiente $W_\alpha^c \subset \Sigma$ de P_α en la cual ocurren los eventos “esenciales”. Por simplicidad, fijemos $n = 3$ y consideremos las principales bifurcaciones del ciclo L_0 : Estas bifurcaciones vendrán dadas por bifurcaciones de puntos fijos de P_α .

5.5.1. Bifurcación silla-nodo de ciclos

Supongamos que para $\alpha = 0$, L_0 tiene un multiplicador simple $\mu_1 = 1$. Por simplicidad, asumamos que $0 < \mu_2 < 1$. Entonces, la restricción de P_α a la variedad invariante W_α^c es un mapeo unidimensional, que posee un punto fijo con $\mu_1 = 1$ en $\alpha = 0$. Genéricamente, esto implica la colisión y desaparición de dos puntos fijos de P_α a medida que α pasa por cero: Una bifurcación fold en el punto fijo asociado a L_0 en $\alpha = 0$. Bajo nuestro supuesto sobre μ_2 , este evento sucede en una variedad invariante unidimensional atrayente de P_α . Luego, los puntos fijos involucrados de P_α son un nodo atractor y un punto silla; ver figura 5.11. Pero cada punto fijo representa una órbita periódica del campo vectorial. Por lo tanto, dos ciclos límite (uno estable y otro silla), colisionan y desaparecen en el sistema a tiempo continuo en esta bifurcación. De esta forma, se tiene el siguiente diagrama de bifurcación de la figura 5.11. Si $\alpha < 0$, hay 1 ciclo hiperbólico estable L_1 y un ciclo hiperbólico silla L_2 . Cuando $\alpha = 0$, solamente hay 1 ciclo no-hiperbólico L_0 . Y para $\alpha > 0$: No hay órbitas periódicas.

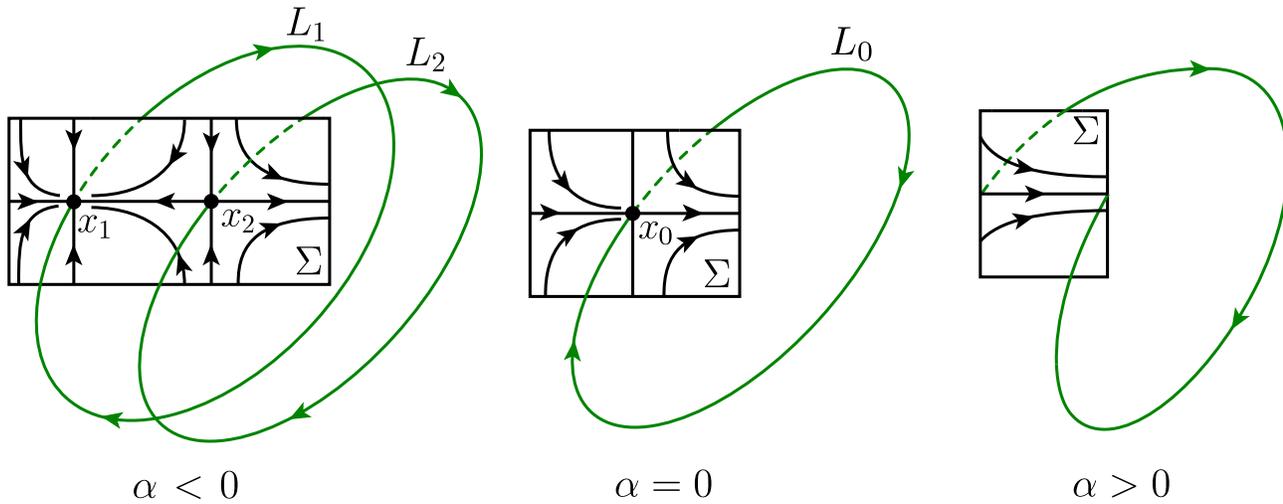


Figura 5.11: Diagrama de bifurcación silla-nodo de ciclos.

5.5.2. Bifurcación period-doubling de ciclos

Supongamos que para $\alpha = 0$, L_0 tiene un multiplicador simple $\mu_1 = -1$, mientras que $-1 < \mu_2 < 0$. Entonces la restricción de P_α a la variedad invariante exhibirá genéricamente una bifurcación period-doubling (flip): Un ciclo de período 2 aparece para el mapeo, y el punto fijo cambia su estabilidad a medida que α pasa por cero; ver figura 5.12. Por ejemplo, dado que la variedad es atrayente, el punto fijo estable de P_α pierde estabilidad y se transforma en una silla, mientras que aparece un punto periódico estable de período 2. El diagrama de bifurcación que emerge es el de la figura 5.12.

Esta bifurcación flip del mapeo de Poincaré se manifiesta en el campo de vectores de la siguiente manera. Para $\alpha < 0$ hay 1 ciclo hiperbólico estable L_0 de período T . Cuando $\alpha = 0$ este ciclo se vuelve no-hiperbólico. Y cuando $\alpha > 0$ hay 2 ciclos hiperbólicos: L_0 es un ciclo silla de período T ; y L_1 es estable con un período $\approx 2T$. El escenario de bifurcación exacto (i.e. súper, o subcrítica) queda determinado por los coeficientes de la forma normal de la restricción del mapeo de Poincaré P_α a la variedad central en $\alpha = 0$.

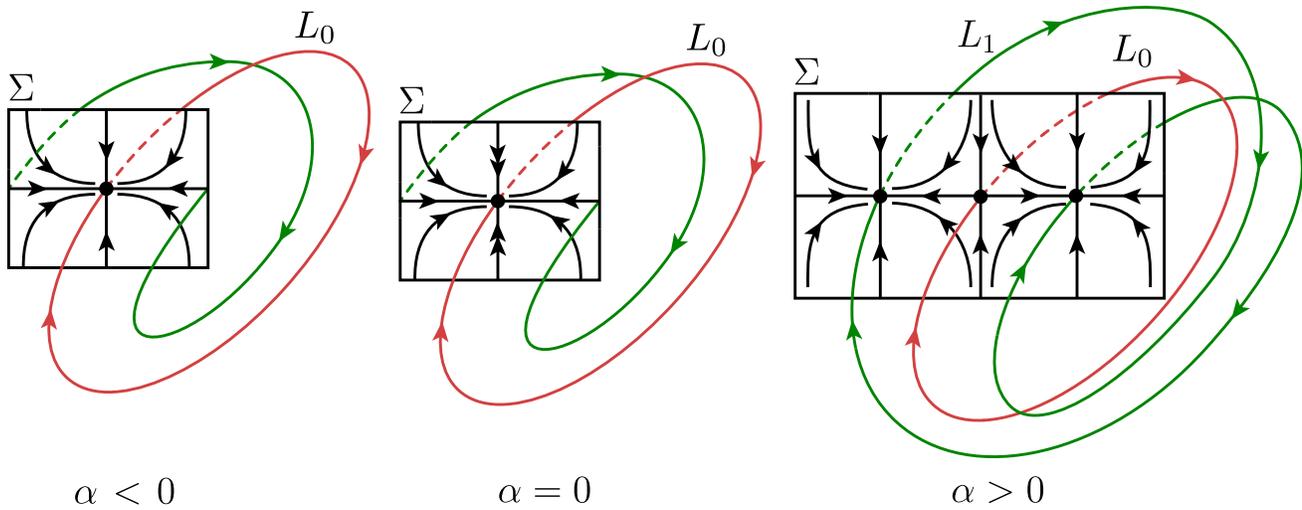


Figura 5.12: Diagrama de bifurcación period-doubling supercrítica de ciclos.

5.5.3. Bifurcación Neimark-Sacker de ciclos

Supongamos que para $\alpha = 0$, los dos multiplicadores de L_0 son complejos conjugados (y simples) y están sobre el círculo unitario: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}$. Entonces, el mapeo de Poincaré posee una variedad invariante 2-dimensional parámetro-dependiente en la cual, genéricamente, se bifurca una curva cerrada invariante desde el punto fijo; ver figura 5.13. Esta curva cerrada corresponde a un *toro invariante* \mathbb{T}^2 en el sistema a tiempo continuo; por ello, este evento también se conoce como *bifurcación de toro*. La bifurcación (i.e. súper, o subcrítica) está determinada por el coeficiente de la forma normal del mapeo de Poincaré restringido al valor de parámetro crítico. La estructura de órbitas en \mathbb{T}^2 está determinada por la restricción de P_α a esta curva cerrada invariante. Luego, genéricamente, existen ciclos de períodos largos y de diferentes tipos de estabilidad contenidos en el toro.

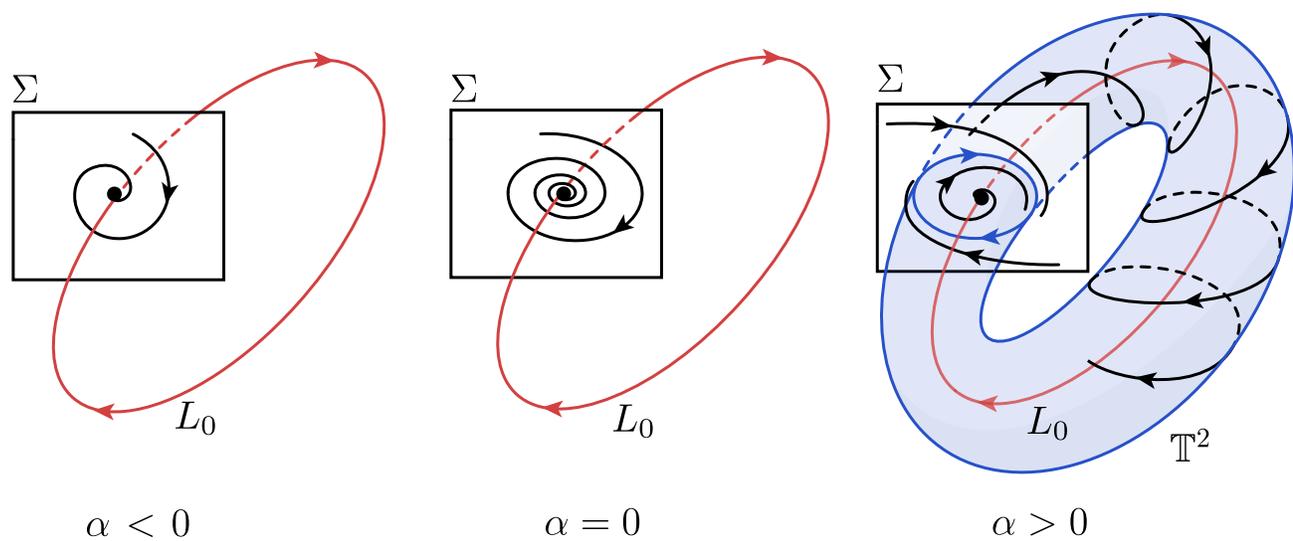


Figura 5.13: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker supercrítica de ciclos.

Capítulo 6

Bifurcaciones locales de codimensión dos

En este capítulo presentamos varios ejemplos prominentes de campos vectoriales que dependen de (al menos) dos parámetros. Concretamente, consideramos sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (6.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, y el campo f es suficientemente suave en (x, α) .

Supongamos que en $\alpha = \alpha^*$ el sistema (6.1) tiene un equilibrio $x = x^*$ para el cual se satisfacen las condiciones de una bifurcación. Entonces, genéricamente, existe una *curva de bifurcación* \mathcal{B} en el plano (α_1, α_2) que pasa por el punto $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$. Cada punto de \mathcal{B} especifica un equilibrio de (6.1) exhibiendo la misma bifurcación; ver bosquejo en la figura 6.1. La curva \mathcal{B} divide al plano (α_1, α_2) en dos regiones disjuntas I y II dentro de las cuales la dinámica es cualitativamente equivalente. Cada vez que un punto (α_1, α_2) cruza transversalmente la curva \mathcal{B} desde la región I hacia la región II (o viceversa) el sistema exhibe dicha bifurcación.

Ejemplo 26 Supongamos que $n = 1$ y que en $\alpha = \alpha^*$ el equilibrio $x = x^*$ tiene un valor propio $\lambda_1 = f_x(x^*, \alpha^*) = 0$. Entonces el sistema algebraico no lineal

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0, \\ f_x(x, \alpha) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

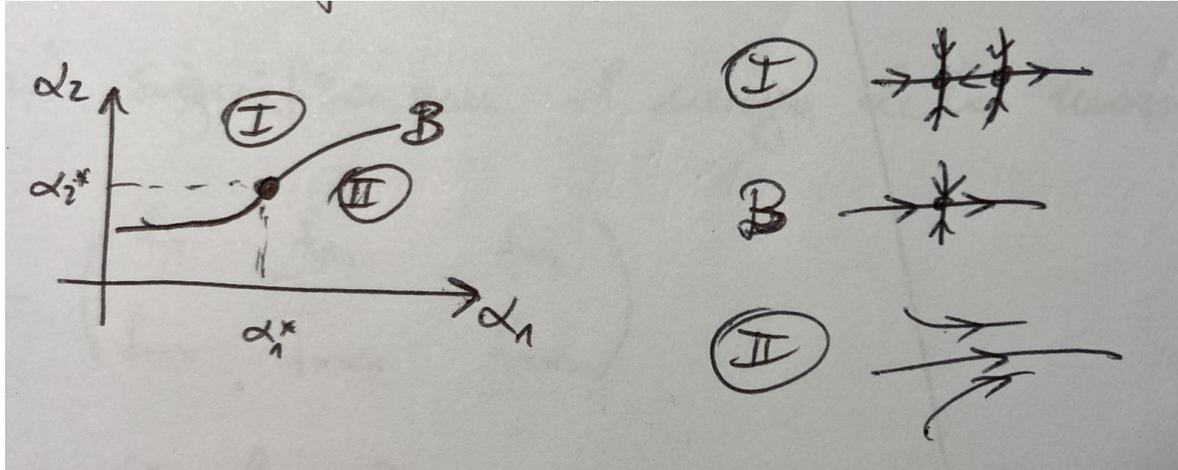


Figura 6.1: Bosquejo esquemático de una curva de bifurcación en el espacio de parámetros (α_1, α_2) y respectivos retratos de fase.

define, genéricamente, una curva (variedad uno-dimensional) $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ de equilibrios con un valor propio $\lambda_1 = 0$ y que pasa por el punto $(x^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)$ como en la figura 6.2. A continuación justificaremos un poco más la existencia y construcción de Γ .

Aquí, *genéricamente* significa que el rango de la matriz jacobiana de (6.2)

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix}$$

es maximal, i.e., igual a 2. Por ejemplo, si la bifurcación fold es genérica (i.e., se satisfacen las condiciones de genericidad en α^* : $f_{xx}(x^*, \alpha^*) \neq 0$, $f_{\alpha_1}(x^*, \alpha^*) \neq 0$), entonces el rango de J es 2 en (x^*, α^*) pues

$$\det \begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\alpha_1} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} \end{pmatrix} = -f_{xx}f_{\alpha_1} \neq 0.$$

En tal caso, el teorema de la función implícita nos da la existencia local de dos funciones suaves $x = X(\alpha_2)$, $\alpha_1 = A(\alpha_2)$, que satisfacen (6.2) y tales que

$$X(\alpha_2^*) = x^*, \quad A(\alpha_2^*) = \alpha_1^*.$$

Estas funciones definen la curva Γ parametrizada por α_2 cerca del punto (x^*, α^*) . Por continuidad, las condiciones de genericidad de la bifurcación fold se satisfarán

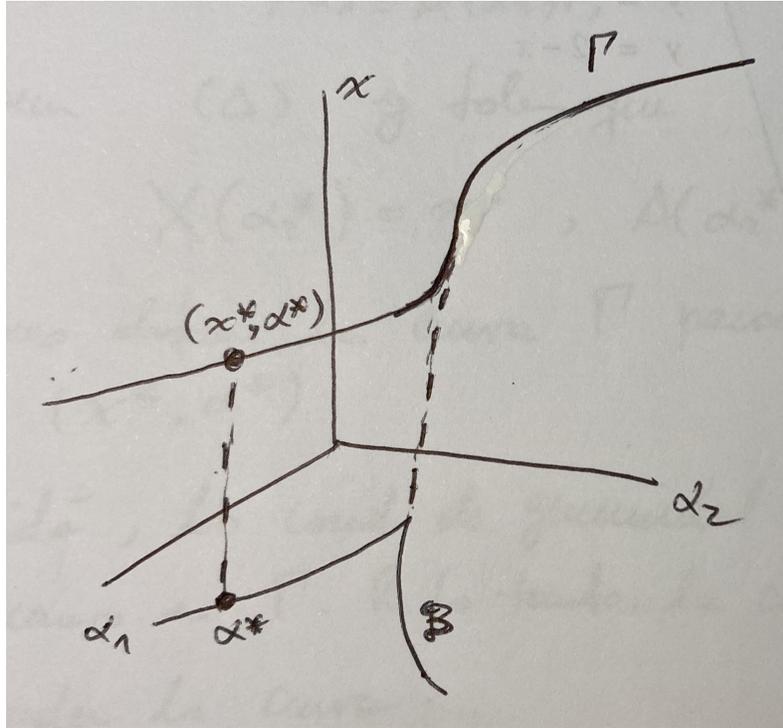


Figura 6.2: Bosquejo esquemático de una curva Γ en el espacio (x, α_1, α_2) de equilibrios con un valor propio $\lambda_1 = 0$. La proyección de esta curva al plano de parámetros define la curva de bifurcación \mathcal{B} .

en puntos cercanos a (x^*, α^*) ; por lo tanto, la construcción se puede repetir para extender la curva Γ .

Cada punto $(x, \alpha) \in \Gamma$ define un punto de equilibrio $x = x(\alpha)$ de (6.1), con $n = 1$, con un valor propio cero en el valor de parámetro α . La proyección estándar $\pi : (x, \alpha) \rightarrow \alpha$ mapea Γ a una curva $\mathcal{B} = \pi(\Gamma)$ en el plano de parámetros. Esta curva \mathcal{B} es análoga a la de la figura 6.1: El sistema exhibe una bifurcación fold cada vez que un punto (α_1, α_2) cruza la curva \mathcal{B} . Sin embargo, \mathcal{B} podría contener puntos “especiales” o *singularidades* en los cuales la bifurcación deja de ser genérica; éste es el foco de la sección siguiente.

6.1. Puntos de codimensión dos

Consideremos de nuevo el sistema n -dimensional (6.1). Supongamos que variamos los parámetros (α_1, α_2) simultáneamente para trazar una curva de bifurcación

Γ (o \mathcal{B}) como en las figuras 6.1 y 6.2 y monitoreamos las propiedades del equilibrio no hiperbólico definido por esta curva de bifurcación. Entonces, los siguientes eventos podrían sucederle al equilibrio a medida que nos movemos a lo largo de Γ (o \mathcal{B}):

1. Valores propios adicionales podrían acercarse y ubicarse en el eje imaginario, aumentando la dimensión de la variedad central W^c .
2. Algunas de las condiciones de genericidad para la bifurcación de codimensión uno podrían violarse.

Ejemplo 27 (Singularidades en una bifurcación fold) Supongamos que la curva \mathcal{B} define una bifurcación silla-nodo. Un punto típico en \mathcal{B} define un equilibrio con un valor propio nulo simple $\lambda_1 = 0$ y ningún otro valor propio en el eje imaginario. La restricción de (6.1) a una variedad central tiene la forma

$$\dot{\xi} = b\xi^2 + O(\xi^3).$$

En un punto silla-nodo no degenerado, el coeficiente b es distinto de cero. A medida que uno traza la curva \mathcal{B} , uno podría encontrar las siguientes singularidades:

1. Un valor propio real λ_2 se acerca al eje imaginario y la variedad central W^c se vuelve bidimensional, es decir:

$$\lambda_{1,2} = 0.$$

Estas son las condiciones para una **bifurcación Bogdanov-Takens** (o doble cero). Para que ocurra, se necesita que la dimensión del espacio de fase sea $n \geq 2$.

2. Dos valores propios complejos adicionales $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ cruzan el eje imaginario y W^c se vuelve tridimensional, esto es:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0.$$

Estas condiciones corresponden a una **bifurcación fold-Hopf**. Obviamente, para que ocurra se requiere que $n \geq 3$.

3. El valor propio $\lambda_1 = 0$ permanece simple y es el único en el eje imaginario (i.e., $\dim W^c = 1$), pero el coeficiente b de la forma normal se anula, es decir:

$$\lambda_1 = 0, \quad b = 0.$$

Estas son las condiciones para una **bifurcación cúspide** (del inglés *cusp*), y puede suceder para $n \geq 1$. Notemos que esta bifurcación es indetectable con solo analizar los valores propios.

Ejemplo 28 (Singularidades en una bifurcación de Hopf) Sea \mathcal{B}_H una curva de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros. En un punto típico de \mathcal{B}_H el sistema tiene un equilibrio con

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

y ningún otro valor propio con parte real nula. Entonces la variedad central W^c posee dimensión dos y existen coordenadas polares (ρ, φ) para las cuales la restricción del sistema a W^c es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{\rho} = l_1 \rho^3 + O(\rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1 + O(\rho^3), \end{cases}$$

donde l_1 es la primera cantidad de Lyapunov. Por definición $l_1 \neq 0$ es un punto Hopf no degenerado. Al movernos a lo largo de \mathcal{B}_H podríamos encontrar los siguientes singularidades:

1. Dos valores propios complejos conjugados extra $\lambda_{3,4}$ cruzan el eje imaginario y W^c se vuelve 4-dimensional:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_1, \quad \omega_{0,1} > 0.$$

Estas condiciones corresponden a una **bifurcación Hopf-Hopf**. Obviamente, para que ocurra se requiere que $n \geq 4$.

2. El primer coeficiente de Lyapunov se anula mientras que $\lambda_{1,2}$ permanecen simples y $\dim W^c = 2$:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (\omega_0 > 0), \quad l_1 = 0.$$

Esto se conoce como una **bifurcación de Hopf generalizada** o **bifurcación Bautin**. Puede suceder en sistemas de dimensión $n \geq 2$. Al igual que la bifurcación cúspide, esta singularidad no se puede detectar con tan solo monitorear los valores propios.

COMENTARIOS.

1. A lo largo de una curva de bifurcación de Hopf también podríamos hallar un punto Bogdanov-Takens a medida que $\omega_0 = 0$. En este punto los dos valores propios imaginarios colisionan en el origen y tenemos un valor propio cero doble.
2. Obviamente, también podríamos hallar un punto fold-Hopf al trazar la curva \mathcal{B}_H .
3. Hemos identificado 5 puntos de bifurcación que uno puede encontrar en sistemas genéricos a dos parámetros al movernos a lo largo de curvas de codimensión uno. Cada una de estas singularidades se caracteriza por dos condiciones independientes y, por lo tanto, es de codimensión dos. *No existen* otras bifurcaciones locales de codimensión dos en sistemas dinámicos continuos genéricos.
4. En este curso estudiaremos los puntos cúspide, Hopf generalizado (Bautin) y Bogdanov-Takens. Las bifurcaciones fold-Hopf y Hopf-Hopf poseen desdoblamientos considerablemente más complicados y con distintos casos de diagramas de bifurcación posibles dependiendo de ciertos coeficientes en las formas normales respectivas.

6.1.1. Bifurcación cúspide

Teorema 17 *Supongamos un sistema unidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

con f suficientemente suave tal que posee en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$, y suponemos que se satisfacen las condiciones de la bifurcación cúspide:

$$\lambda = f_x(0, 0) = 0, \quad b = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) = 0.$$

Asuma que las siguientes condiciones de genericidad se satisfacen:

$$(C1) \quad f_{xxx}(0,0) \neq 0;$$

$$(C2) \quad (f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})|_{(0,0)} \neq 0.$$

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca de $x = 0$ a una de las formas normales topológicas

$$\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y \pm y^3,$$

para $(\beta_1, \beta_2) \approx (0,0)$ suficientemente pequeños.

Consideremos la forma normal $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$. ¿Cuál es su diagrama de bifurcación? Esta forma normal puede tener hasta tres equilibrios, los cuales son las raíces reales de $\beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0$. Derivando la forma normal con respecto a y e igualando a cero se tiene $\beta_2 - 3y^2 = 0$. Por lo tanto, la curva Γ definida por

$$\Gamma : \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0, \\ \beta_2 - 3y^2 = 0, \end{cases}$$

define una bifurcación fold. La proyección de Γ al plano (β_1, β_2) nos da una curva T de bifurcación silla-nodo en el plano de parámetros. Eliminando y del sistema algebraico anterior obtenemos la proyección buscada:

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 = 0\}.$$

La curva T tiene dos ramas T_1 y T_2 que se encuentran tangencialmente en el punto cúspide $(0,0)$; ver figura 6.3. La curva T divide al plano (β_1, β_2) en dos regiones abiertas denotadas **1** y **2**, respectivamente. En la región **1**, el sistema tiene tres equilibrios, dos estables y uno inestable; mientras que en **2** solo hay un equilibrio estable. A lo largo de T_1 o T_2 ocurre una bifurcación silla-nodo con respecto a β_1 . En el origen $(\beta_1, \beta_2) = (0,0)$ existe un colapso de tres equilibrios en una raíz triple de $\beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0$. Además, notemos que a lo largo del eje $\beta_1 = 0$ ocurre una bifurcación pitchfork con respecto a β_2 al obtener $\dot{y} = \beta_2 y - y^3$.

La figura 6.4 muestra la variedad de equilibrios

$$M = \{(y, \beta_1, \beta_2) : \beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0\}$$

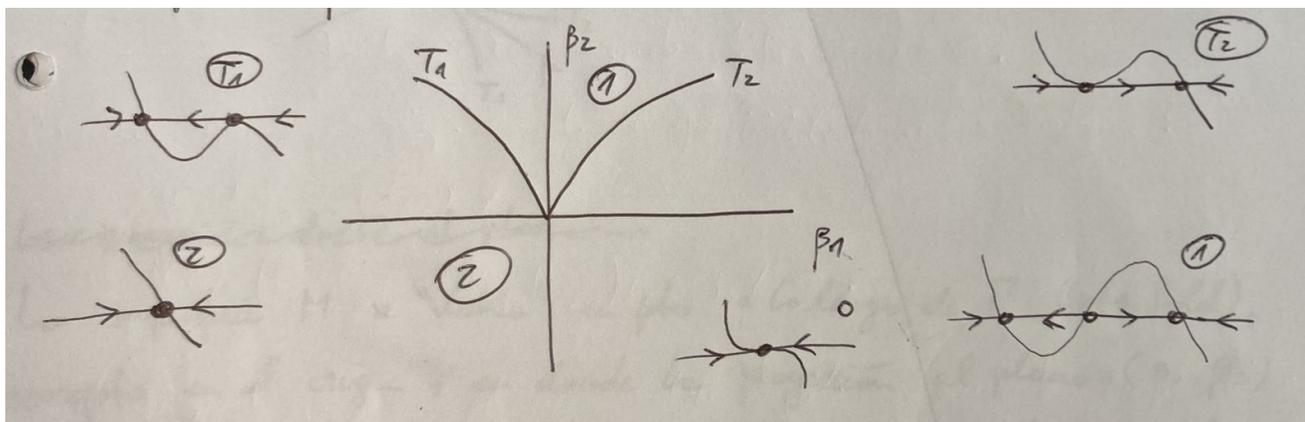


Figura 6.3: Diagrama de bifurcación de la forma normal $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$ de la bifurcación cúspide.

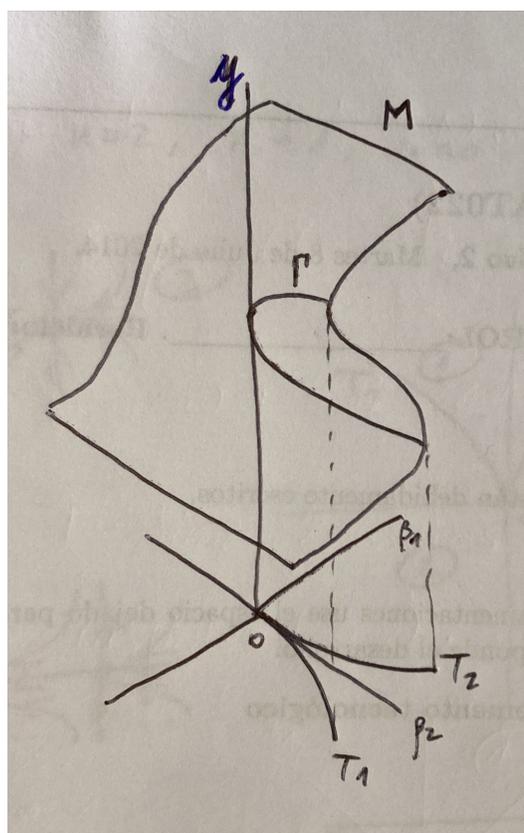


Figura 6.4: Variedad de equilibrios M de la forma normal topológica $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$ de la bifurcación cúspide.

en el espacio tridimensional (y, β_1, β_2) . La superficie se “dobla” en los puntos a lo largo de Γ —puntos fold—, excepto en el origen, en donde la proyección al plano (β_1, β_2) tiene una singularidad cúspide. (Note que Γ es suave en todos los puntos, pero su proyección T pierde diferenciabilidad en el origen.)

Bifurcación cúspide en sistemas n -dimensionales

En un sistema n -dimensional, $n \geq 2$, con una bifurcación cúspide, el teorema anterior debe ser aplicado a la restricción del campo de vectores a la variedad central respectiva y así obtenemos la forma normal topológica:

$$\begin{cases} \dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y \pm y^3, \\ \dot{\xi}_1 = -\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2, \end{cases}$$

donde $y \in \mathbb{R}$ define un sistema de coordenadas en W^c , $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_-}$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_+}$, y n_-, n_+ son el número de valores propios con parte real negativa y positiva, respectivamente. Por ejemplo, la figura 6.5 muestra el caso $n = 2$, $n_- = 1$, $n_+ = 0$ para el sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3, \\ \dot{\xi}_1 = -\xi_1. \end{cases}$$

El diagrama de bifurcación es exactamente el mismo que en el caso $n = 1$, excepto por la componente hiperbólica (adicional) del campo que contrae todas las órbitas hacia la variedad central W^c ubicada en el eje $\xi_1 = 0$.

6.1.2. Bifurcación de Hopf generalizada o Bautin

Teorema 18 *Supongamos un sistema planar*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

con f suficientemente suave tal que posee un equilibrio $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

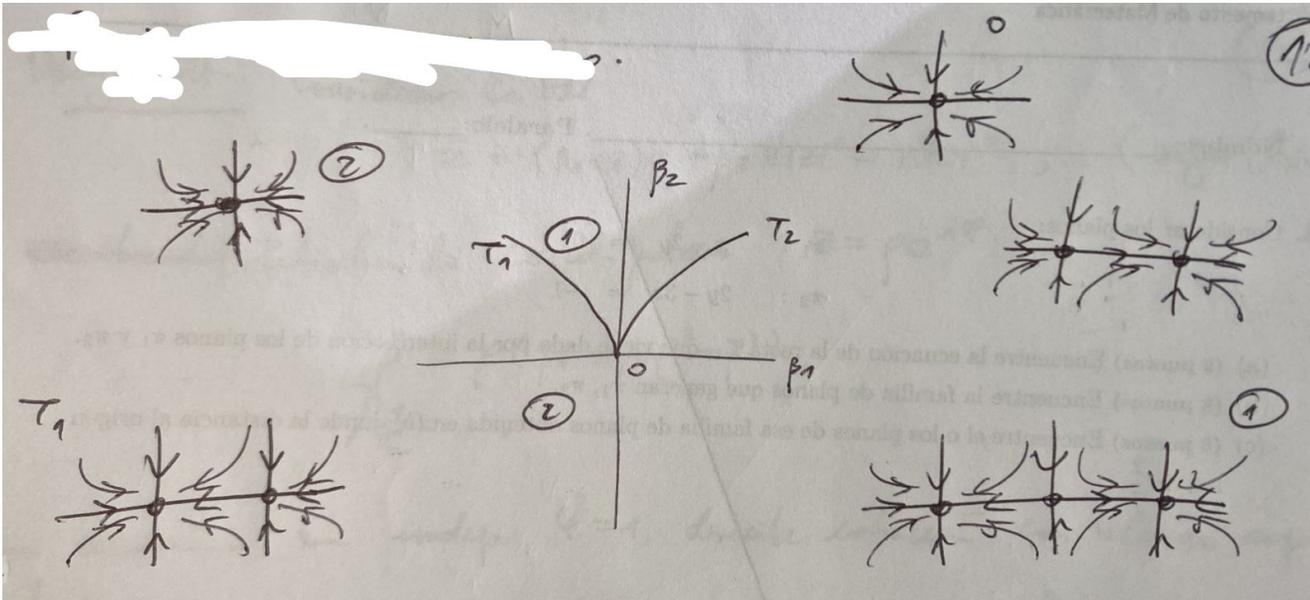


Figura 6.5: Diagrama de bifurcación de una forma normal de la bifurcación cúspide en $n = 2$.

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Supongamos que para $\alpha = 0$ se tiene

$$\mu(0) = 0, \quad l_1(0) = 0,$$

donde $l_1(\alpha)$ es la primera cantidad de Lyapunov. Asumamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(B1) $l_2(0) \neq 0$, donde l_2 es la **segunda cantidad de Lyapunov**;

(B2) El mapeo $\alpha \mapsto (\mu(\alpha), l_1(\alpha))^t$ es regular en $\alpha = 0$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca de $x = 0$ a una de las formas normales complejas:

$$\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 \pm z|z|^4,$$

para $(\beta_1, \beta_2) \approx (0, 0)$ suficientemente pequeños, y donde el signo \pm corresponde a $\text{sign}(l_2(0))$.

Describamos el diagrama de bifurcación de la forma normal topológica

$$\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 - z|z|^4,$$

es decir, con $\text{sign}(l_2(0)) < 0$. Introduciendo coordenadas polares $z = \rho e^{i\varphi}$, obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Notemos que estas ecuaciones son independientes; en particular, $\dot{\varphi} = 1$ describe una rotación con velocidad angular unitaria (constante). En $\rho = 0$ existe un equilibrio trivial correspondiente a $z = 0$. Los equilibrios no triviales (cuando existan) son raíces positivas de

$$\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4 = 0,$$

y corresponden a órbitas periódicas circulares. Estas soluciones se ramifican desde la solución trivial a lo largo de la recta

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$$

y colisionan y desaparecen en la semiparábola

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}.$$

La figura 6.6 muestra el diagrama de bifurcación resultante. La curva H es una curva de bifurcación de Hopf dividida en dos segmentos H_+ y H_- ubicadas en el semieje $\beta_2 > 0$ y $\beta_2 < 0$, respectivamente. El signo de β_2 determina el signo de la primera cantidad de Lyapunov $l_1(\beta)$ (compare con la forma normal de la sección 3.2.1). En efecto, a lo largo de H_+ , se tiene $l_1(\beta) > 0$ y la bifurcación de Hopf es subcrítica; mientras que a lo largo de H_- , se tiene $l_1(\beta) < 0$ y la bifurcación de Hopf es supercrítica.

La bifurcación de Hopf es de codimensión uno a lo largo de toda la curva H excepto en el origen $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ en donde ocurre el cambio de criticalidad. Más aún, el equilibrio $z = 0$ es estable para $\beta_1 < 0$ e inestable para $\beta_1 > 0$. Luego, un único ciclo límite *estable* se bifurca cuando el punto (β_1, β_2) cruza H_- desde la región **1** hacia la **2**. Este ciclo límite estable es hiperbólico y persiste en toda la región **2**. Análogamente, un único ciclo límite *inestable* se bifurca cuando el punto (β_1, β_2) cruza H_+ desde la región **2** hacia la **3**. Sin embargo, esta bifurcación no afecta al ciclo límite creado en H_- . Por lo tanto, si (β_1, β_2) está en la

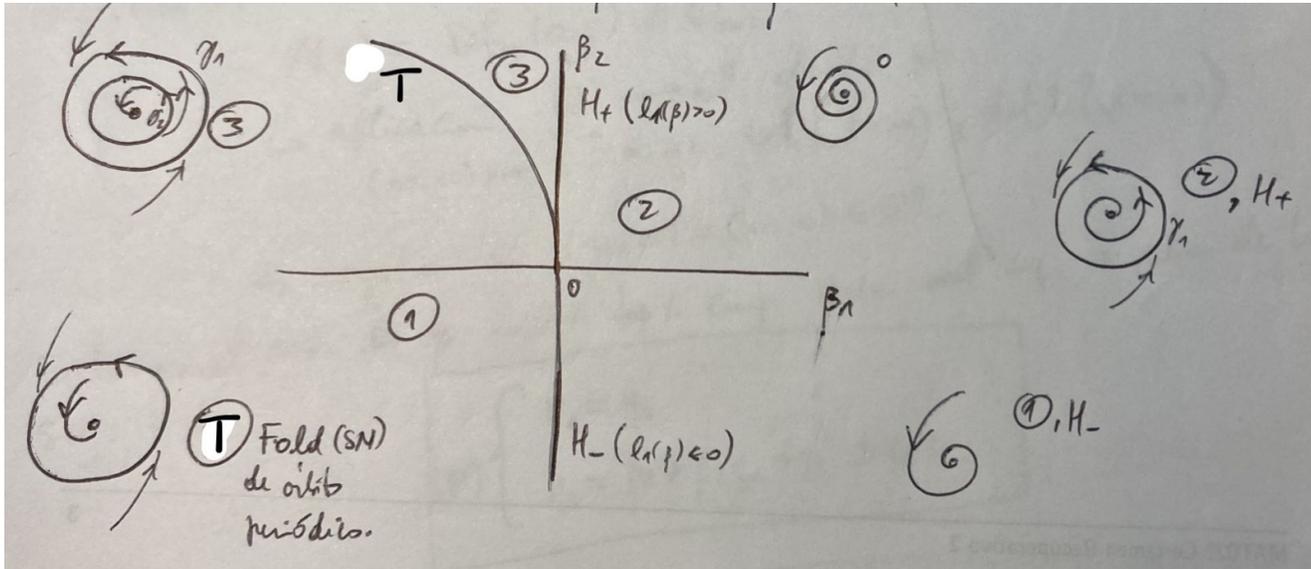


Figura 6.6: Diagrama de bifurcación de la forma normal $\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 - z|z|^4$ de la bifurcación de Hopf generalizada.

región **3**, el origen está rodeado de dos ciclos, uno estable (de mayor amplitud) y uno inestable (infinitesimal). La transición entre las regiones **1** y **3** ocurre en la curva T , la que corresponde a una bifurcación fold de ciclos —a lo largo de T , el sistema tiene un solo ciclo con multiplicador $\mu = 1$.

COMENTARIOS.

1. El teorema anterior significa que la forma normal descrita captura la topología de cualquier sistema bidimensional que tenga una bifurcación Bautin y que satisfaga las condiciones de genericidad.
2. Bajo las hipótesis del teorema, aunque los ciclos límite en el sistema original no sean círculos perfectos, podemos esperar la existencia de dos de ellos para valores de parámetros cercanos. Más aún, los ciclos colisionan y desaparecen a lo largo de la curva T que emana desde el punto de codimensión dos.
3. La bifurcación Bautin es el primer ejemplo de la aparición de una bifurcación de ciclos límite cerca de una bifurcación de codimensión dos de equilibrios. En este caso, con tan solo análisis local podemos probar la existencia de una

bifurcación fold de ciclos para valores cercanos de los parámetros.

4. El caso $l_2(0) > 0$ se puede tratar en forma similar al hacer la transformación $(z, \beta, t) \mapsto (\bar{z}, -\beta, -t)$.
5. El cálculo del coeficiente $l_2(0)$ es, en general, demasiado complicado y extenso —Pueden buscarse los detalles en la literatura. Afortunadamente, existen paquetes computacionales con rutinas que determinan su signo.
6. El caso n -dimensional, $n \geq 3$, puede tratarse de manera completamente análoga considerando la reducción de la variedad central al caso planar ya estudiado. El diagrama de bifurcación es exactamente el mismo que en el caso planar, con la adición de las $n-2$ componentes hiperbólicas complementarias. Por ejemplo, una forma normal topológica para la bifurcación Bautin en \mathbb{R}^n es:

$$\begin{cases} \dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 + sz|z|^4, \\ \dot{\xi}_- = -\xi_-, \\ \dot{\xi}_+ = \xi_+, \end{cases}$$

donde $s = \text{sign}(l_2(0)) = \pm 1$, $z \in \mathbb{C}$, $\xi_{\pm} \in \mathbb{R}^{n_{\pm}}$, y n_+ y n_- son el número de valores propios del equilibrio crítico con $\text{Re}\lambda > 0$ y $\text{Re}\lambda < 0$, respectivamente, tal que $n_- + n_+ + 2 = n$.

6.1.3. Bifurcación Bogdanov-Takens

Supongamos un sistema planar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{6.3}$$

con f suficientemente suave tal que posee en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con un valor propio cero doble $\lambda_{1,2}(0) = 0$. Podemos escribir el sistema en $\alpha = 0$ en la forma

$$\dot{x} = A_0 x + F(x), \tag{6.4}$$

donde $A_0 = Df_x(0, 0)$ es la matriz jacobiana de f con respecto a x en $(x, \alpha) = (0, 0)$, y $F(x) = f(x, 0) - A_0 x$ es una función suave, con $F(x) = O(\|x\|^2)$. Las

condiciones de bifurcación implican que

$$\det A_0 = 0, \quad \operatorname{tr} A_0 = 0.$$

Asumamos que $A_0 \neq 0$, es decir, A_0 tiene al menos una entrada no nula. Entonces existen dos vectores reales linealmente independientes $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^2$, tales que

$$A_0 q_0 = 0, \quad A_0 q_1 = q_0. \quad (6.5)$$

El vector q_0 es el vector propio de A_0 correspondiente al valor propio 0, mientras que q_1 es el vector propio *generalizado* de A_0 correspondiente a este valor propio. Más aún, existen vectores propios *adjuntos* $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ de la matriz traspuesta A_0^T :

$$A_0^T p_1 = 0, \quad A_0^T p_0 = p_1. \quad (6.6)$$

Los vectores q_1 y p_0 no son únicos incluso si q_0 y p_1 están fijos. No obstante, siempre podemos seleccionar cuatro vectores que satisfagan (6.5) y (6.6) tales que

$$\begin{aligned} \langle q_0, p_0 \rangle &= \langle q_1, p_1 \rangle = 1, \\ \langle q_1, p_0 \rangle &= \langle q_0, p_1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar estándar en \mathbb{R}^2 : $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Si seleccionamos q_0 y q_1 como base de \mathbb{R}^2 , entonces cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ se puede representar de manera única como

$$x = y_1 q_0 + y_2 q_1,$$

para ciertos $y_{1,2} \in \mathbb{R}$. Tomando en cuenta (6.7) obtenemos que estas nuevas coordenadas (y_1, y_2) vienen dadas por

$$\begin{cases} y_1 = \langle p_0, x \rangle, \\ y_2 = \langle p_1, x \rangle. \end{cases} \quad (6.8)$$

En las coordenadas (y_1, y_2) , el sistema (6.4) toma la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle p_0, F(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \\ \langle p_1, F(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Note la forma particular de la matriz jacobiana, la cual corresponde al bloque de Jordan de orden 2 con ceros en la diagonal.

Ocupemos las coordenadas (y_1, y_2) para todo α con $\|\alpha\|$ pequeño. En estas coordenadas, el sistema original (6.3) queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle p_0, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \\ \langle p_1, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

el que se reduce a (6.9) para $\alpha = 0$. Expandiendo el lado derecho de (6.10) como serie de Taylor con respecto a y en $y = 0$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 \\ \quad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + P_1(y, \alpha), \\ \dot{y}_2 = b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)y_1 + b_{01}(\alpha)y_2 \\ \quad + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_1^2 + b_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)y_2^2 + P_2(y, \alpha), \end{cases} \quad (6.11)$$

donde los coeficientes $a_{kl}(\alpha), b_{kl}(\alpha)$ y $P_{1,2}(y, \alpha) = O(\|y\|^3)$ son funciones suaves en sus argumentos. A partir de (6.9) tenemos

$$a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

Las funciones $a_{kl}(\alpha)$ y $b_{kl}(\alpha)$ se pueden expresar en términos del lado derecho $f(x, \alpha)$ de (6.3) y de los vectores $q_{0,1}, p_{01}$. Por ejemplo,

$$\begin{cases} a_{20}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle p_0, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \Big|_{y=0}, \\ b_{20}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle p_1, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \Big|_{y=0}, \\ b_{11}(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle p_1, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \Big|_{y=0}. \end{cases}$$

A partir de transformaciones de coordenadas suaves (que dependen suavemente de los parámetros), reparametrizaciones del tiempo y cambios de parámetros obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 19 *Supongamos un sistema planar*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

con f suficientemente suave tal que posee en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con un valor propio cero doble $\lambda_{1,2}(0) = 0$.

Asuma que las siguientes condiciones de genericidad se satisfacen:

(BT1) La matriz jacobiana $A_0 = Df_x(0, 0) \neq 0$;

(BT2) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$;

(BT3) $b_{20}(0) \neq 0$;

(BT4) La aplicación

$$(x, \alpha) \mapsto (f(x, \alpha), \operatorname{tr}(Df_x(x, \alpha)), \det(Df_x(x, \alpha)))$$

es regular en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2, \end{cases} \quad (6.12)$$

donde $s = \operatorname{sign}((a_{20}(0) + b_{11}(0))b_{20}(0)) = \pm 1$.

Existen varias formas normales (equivalentes) para la bifurcación Bogdanov-Takens. La forma normal (6.12) fue introducida por Bogdanov, mientras que Takens derivó (de manera simultánea e independiente) la forma normal

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + \beta_2 y_1 + y_1^2, \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + s y_1^2, \end{cases}$$

donde $s = \pm 1$.

Diagrama de bifurcación de la forma normal

Escojamos $s = -1$ en el sistema (6.12):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 - y_1 y_2. \end{cases} \quad (6.13)$$

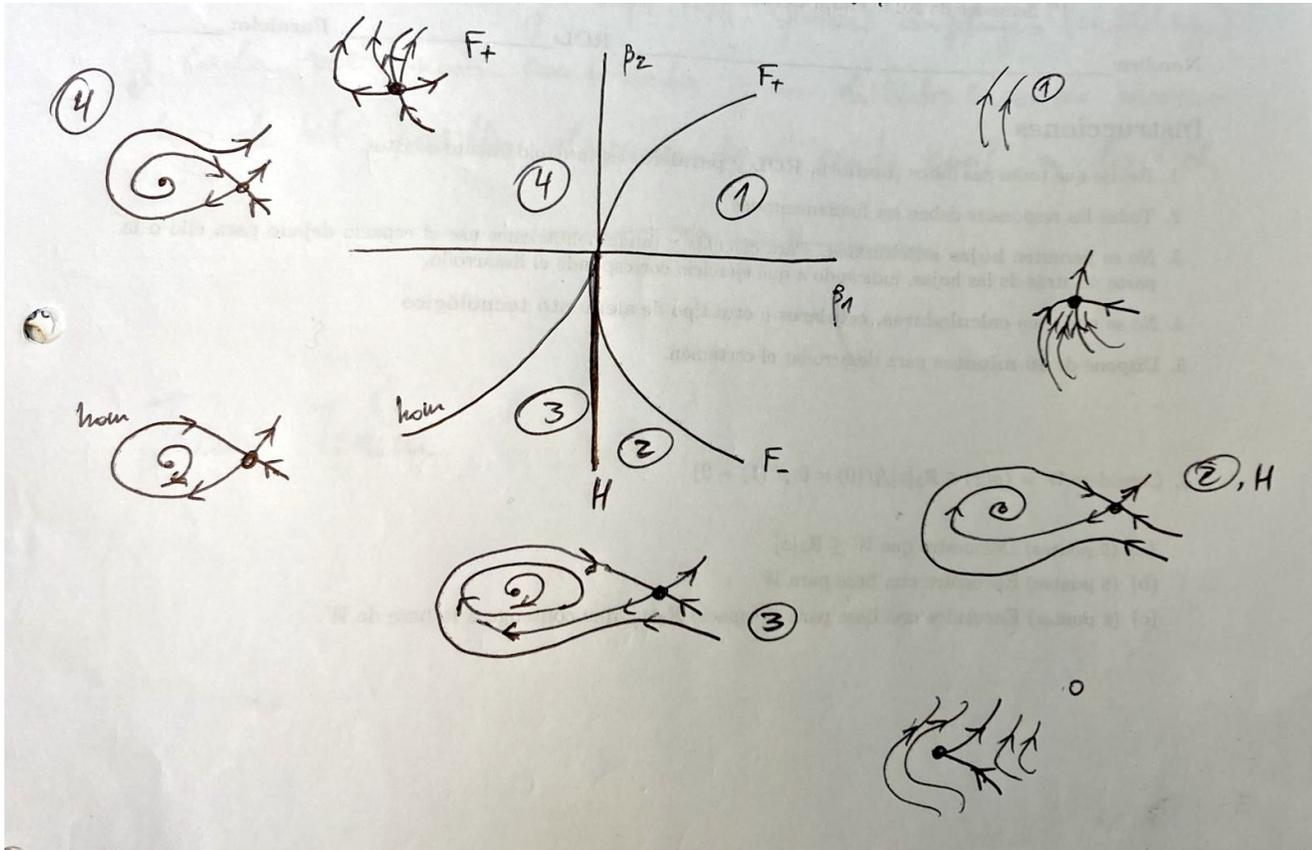


Figura 6.7: Diagrama de bifurcación de la forma normal (6.12) con $s = -1$ de la bifurcación Bogdanov-Takens.

La figura 6.7 muestra el diagrama de bifurcación. Todos los equilibrios están ubicados en el eje horizontal $y_2 = 0$ y satisfacen la ecuación

$$\beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 = 0.$$

Esta ecuación puede tener entre cero y dos raíces reales. La parábola

$$F = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_1 - \beta_2^2 = 0\}$$

determina el signo del discriminante asociado y corresponde a una bifurcación fold: A lo largo de esta curva el sistema (6.13) posee un equilibrio con un valor propio cero. Si $\beta_2 \neq 0$, entonces la bifurcación fold es no degenerada y cruzar F de derecha a izquierda implica la aparición de dos equilibrios. Denotemos al

izquierdo por E_1 y al derecho por E_2 :

$$E_{1,2} = (y_{1,2}^0, 0) = \left(\frac{-\beta_2 \mp \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right).$$

El punto $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ separa dos ramas F_- y F_+ de la curva fold correspondientes a $\beta_2 < 0$ y $\beta_2 > 0$, respectivamente: Pasar por F_- implica el colapso de un nodo estable E_1 con un punto silla E_2 , mientras que pasar por F_+ genera un nodo inestable E_1 y una silla E_2 .

El semieje vertical

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$$

corresponde a una bifurcación de Hopf no degenerada donde el equilibrio E_1 tiene un par de valores propios con parte real nula ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$). La bifurcación de Hopf da lugar a un ciclo límite estable pues $l_1 < 0$. El ciclo existe cerca de H para $\beta_1 < 0$. El equilibrio E_2 permanece como silla para todos los valores de parámetros a la izquierda de la curva F y no pasa por bifurcaciones. No existen otras bifurcaciones locales en la dinámica de (6.13).

Realicemos un circuito alrededor de $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ para (β_1, β_2) suficientemente pequeños, partiendo desde la región **1** donde no hay equilibrios (y luego no pueden haber ciclos límite). Entrando desde la región **1** a la región **2** a través de T_- aparecen dos equilibrios: una silla y un nodo estable. Luego, el nodo se transforma en foco y pierde estabilidad a medida que cruzamos la curva H : Aparece un ciclo límite estable para valores de parámetros cercanos a H en la región **3**. Si continuamos el circuito en sentido horario y volvemos a la región **1** no debe permanecer ningún ciclo límite. ¿Cómo desaparece el ciclo límite estable creado en la bifurcación de Hopf? No puede ser a través de otra bifurcación de Hopf, pues la estabilidad del equilibrio E_1 volvería a cambiar. Tampoco puede ser por una bifurcación silla-nodo de ciclos, pues no hay un segundo ciclo cerca de $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$. Por lo tanto, deben haber bifurcaciones globales “destruyendo” el ciclo en algún lugar entre H y F_+ . La respuesta es la existencia de una curva de bifurcación homoclínica

$$hom = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2), \beta_2 < 0 \right\}$$

que se origina en $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$ y separa las regiones **3** y **4**. A lo largo de hom el sistema (6.13) tiene una órbita homoclínica a la silla E_2 . A medida que trazamos la homoclínica a lo largo de hom hacia el punto Bogdanov-Takens $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$, el loop se va encogiendo y (en el límite) desaparece. De esta manera, existe un único ciclo hiperbólico (estable) para parámetros dentro de la región **3** acotada por la curva H y por la curva hom , y no existen ciclos fuera de esta región. El ciclo que nace en H “crece” y se acerca al punto silla E_2 ; finalmente “muere” al transformarse en la órbita homoclínica en hom .

Para completar el circuito, notemos que no existen ciclos en la región **4** ubicada entre la curva hom y la rama F_+ . Un nodo inestable y una silla —que existen para valores de parámetros en **4**— colisionan y desaparecen en la curva fold F_+ . Señalemos también que en $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$ el equilibrio crítico con un valor propio cero doble tiene exactamente dos órbitas asintóticas (una que tiende al equilibrio para $t \rightarrow +\infty$ y una que se acerca para $t \rightarrow -\infty$). Estas órbitas forman una punta con forma de cúspide.

COMENTARIOS.

1. El caso $s = +1$ se puede tratar de manera similar. Dado que se puede reducir al caso ya presentado mediante la sustitución $t \mapsto -t$, $y_2 \mapsto -y_2$, los retratos paramétricos permanecen pero el ciclo se vuelve inestable cerca del punto Bogdanov-Takens.
2. El teorema anterior nos entrega una manera analítica —al verificar las condiciones de bifurcación y las condiciones de genericidad (BT1)-(BT4)— de probar la existencia de una bifurcación homoclínica. Este es uno de los pocos métodos regulares para detectar bifurcaciones homoclínicas analíticamente.
3. El caso multidimensional de la bifurcación Bogdanov-Takens no trae nada nuevo pues se puede reducir al caso planar usando el teorema de la variedad central. Por ejemplo, una forma normal topológica para la bifurcación

Bogdanov-Takens en \mathbb{R}^n es:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2, \\ \dot{\xi}_- = -\xi_-, \\ \dot{\xi}_+ = \xi_+, \end{cases}$$

donde $s = \pm 1$, $\xi_{\pm} \in \mathbb{R}^{n_{\pm}}$, y n_+ y n_- son el número de valores propios del equilibrio crítico con $\operatorname{Re}\lambda > 0$ y $\operatorname{Re}\lambda < 0$, respectivamente, tal que $n_- + n_+ + 2 = n$.

Capítulo 7

Bifurcaciones globales en campos vectoriales

Las variedades invariantes de mapeos y campos vectoriales juegan un papel clave en la organización de un espacio de fase. Las variedades (in)estables globales pueden sufrir reordenamientos críticos bajo la variación de parámetros dando lugar a bifurcaciones de estas variedades invariantes. Como consecuencia, estas transiciones topológicas y geométricas pueden resultar en cambios drásticos en regiones extensas del espacio de fase. Por esta razón, uno se refiere a estos eventos como **bifurcaciones globales**, en contraste con las bifurcaciones *locales* que se manifiestan solo en vecindades de equilibrios o puntos fijos. Las bifurcaciones globales pueden dar lugar a la formación de órbitas homoclínicas y heteroclínicas, la creación o modificación de cuencas de atracción, e incluso desencadenar el inicio de caos. Esto es de especial interés para comprender la naturaleza de los sistemas cercanos a las bifurcaciones globales en muchas aplicaciones, como en dinámica de láseres, impulsos nerviosos en neuronas, reacciones electroquímicas, sistemas de comunicación basados en caos, umbrales de extinción/supervivencia en modelos poblacionales, etc.

En este capítulo nos concentramos en los cambios topológicos en la dinámica cuando una órbita homoclínica se rompe (o se crea) al mover un parámetro de un sistema. Considere un sistema dinámico a tiempo continuo

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.1)$$

con f suficientemente suave. Supongamos que x_0, x_1, x_2 son equilibrios del sistema

y denotemos por φ^t al flujo asociado.

Definición 21 Una órbita Γ_0 de (7.1) se dice **homoclínica** al equilibrio x_0 si para un cierto valor $\alpha = \alpha^*$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi^t(x) = x_0, \quad \text{para todo } x \in \Gamma_0.$$

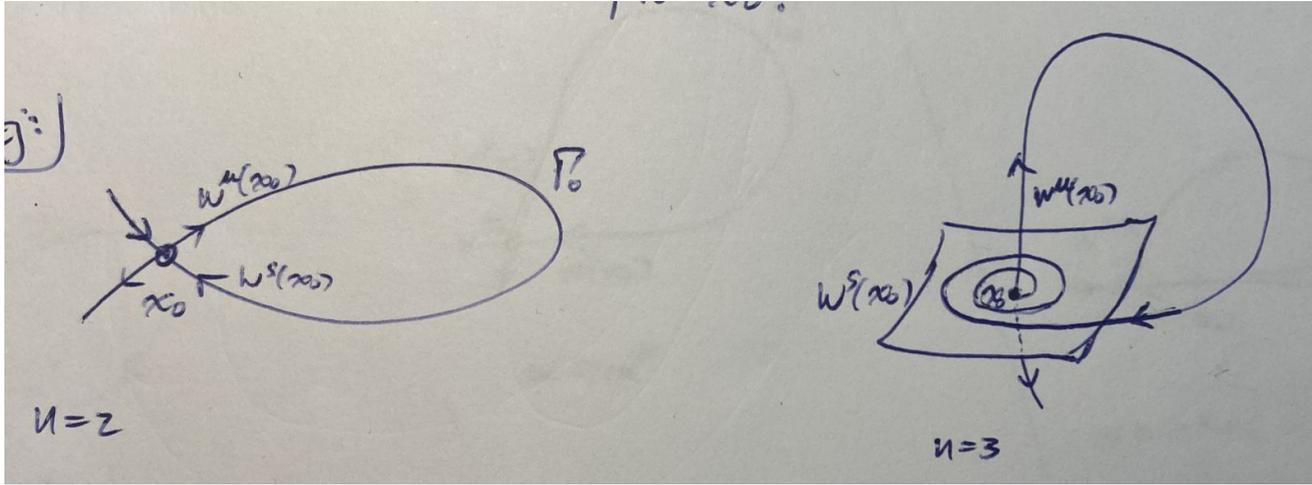


Figura 7.1: Ejemplos de órbitas homoclínicas en dimensión $n = 2$ y $n = 3$.

La figura 7.1 muestra ejemplos de algunas órbitas homoclínicas. Notemos que en cada caso $\Gamma_0 \subset W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$, es decir, la conexión homoclínica viene dada por la intersección de las variedades invariantes globales $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ de x_0 .

Definición 22 Una órbita Γ_0 de (7.1) se dice **heteroclínica** entre los equilibrios x_1 y x_2 si para un cierto valor $\alpha = \alpha^*$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_2, \quad \text{para todo } x \in \Gamma_0.$$

En el caso de una conexión heteroclínica, ésta se caracteriza por “conectar” dos equilibrios distintos; ver figura 7.2. Notemos que en cada caso $\Gamma_0 \subset W^u(x_1) \cap W^s(x_2)$.

Notemos que las definiciones anteriores no requieren que los equilibrios sean hiperbólicos. Por ejemplo, la figura 7.3 muestra una órbita homoclínica que conecta un equilibrio x_0 en el momento de una bifurcación silla-nodo. Aquí, la órbita homoclínica $\Gamma_0 \subset W^c(x_0)$ está contenida en una variedad central de x_0 .

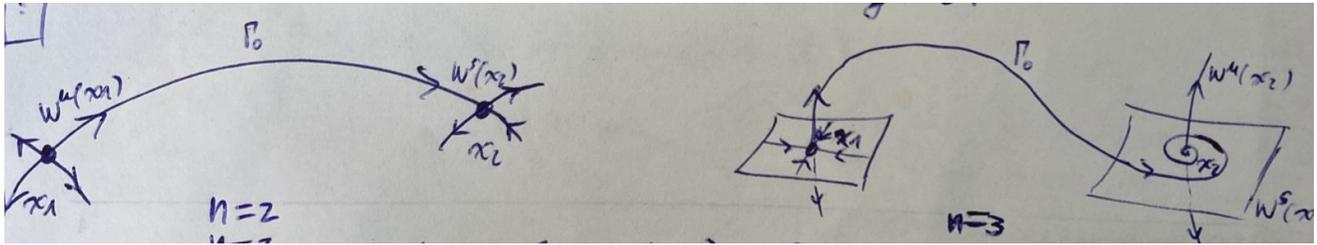


Figura 7.2: Ejemplos de órbitas heteroclínicas en dimensión $n = 2$ y $n = 3$.

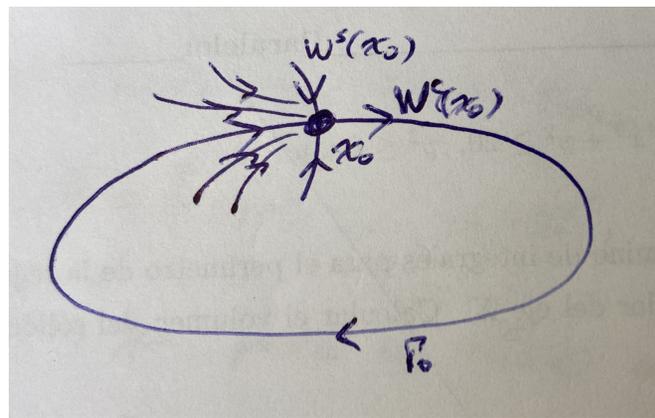


Figura 7.3: Una órbita homoclínica a un equilibrio no-hiperbólico.

7.1. Bifurcaciones globales y transversalidad

El propósito de esta sección es mostrar el siguiente resultado fundamental.

Lema 7 *Una órbita homoclínica a un equilibrio hiperbólico de (7.1) es un objeto estructuralmente inestable.*

Esto quiere decir que cualquier pequeña perturbación del sistema rompe la intersección de variedades invariantes obteniendo retratos de fase cualitativamente diferentes a aquel en donde existe la conexión homoclínica; ver figura 7.4. En definitiva la órbita homoclínica desaparece provocando una bifurcación en toda una vecindad de $\Gamma_0 \cup \{x_0\}$. Para probar este lema primero debemos introducir los siguientes conceptos de transversalidad.

Definición 23 *Decimos que dos variedades suaves $M, N \subset \mathbb{R}^n$ se intersectan*

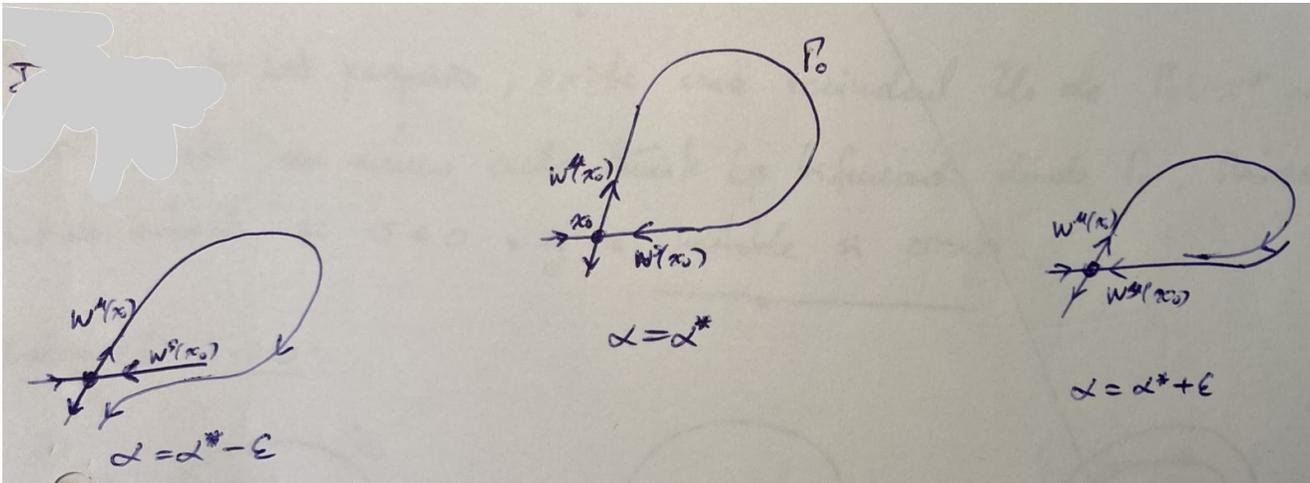


Figura 7.4: Una órbita homoclínica a un equilibrio hiperbólico es estructuralmente inestable.

transversalmente si existen n vectores linealmente independientes tal que cada uno de ellos sea tangente a (al menos) una de estas variedades en cualquier punto de la intersección $M \cap N$. En tal caso, denotamos tal intersección como $M \pitchfork N$. Equivalentemente en términos de los espacios tangentes se cumple: $M \pitchfork N$ ssi $T_x M + T_x N = \mathbb{R}^n$, para todo $x \in M \cap N$, por lo tanto $\dim(T_x M + T_x N) = n$.

La noción de intersección transversal generaliza la que uno posee con respecto a objetos en el plano o el espacio tridimensional. Por ejemplo, la figura 7.5 muestra una curva suave intersectando una superficie suave S en \mathbb{R}^3 . El plano tangente a S en el punto de intersección está generado por los vectores T_1 y T_2 , mientras que \hat{T} denota un vector tangente a la curva en la intersección. Si el ángulo θ entre \hat{T} y el vector \hat{n} normal a S no es un ángulo recto, i.e., si $\theta \neq \pi/2$, entonces el ángulo de intersección de la curva con el plano es no nulo y la intersección es transversal — efectivamente, en tal caso el conjunto $\{T_1, T_2, \hat{T}\}$ es linealmente independiente.

OBSERVACIONES.

1. Notemos que si dos variedades M, N no se intersectan en ningún punto, entonces satisfacen de manera trivial la definición anterior. Por lo tanto, decimos que M y N se intersectan transversalmente, incluso si $M \cap N = \emptyset$.
2. Una intersección transversal *persiste* bajo pequeñas perturbaciones C^1 de

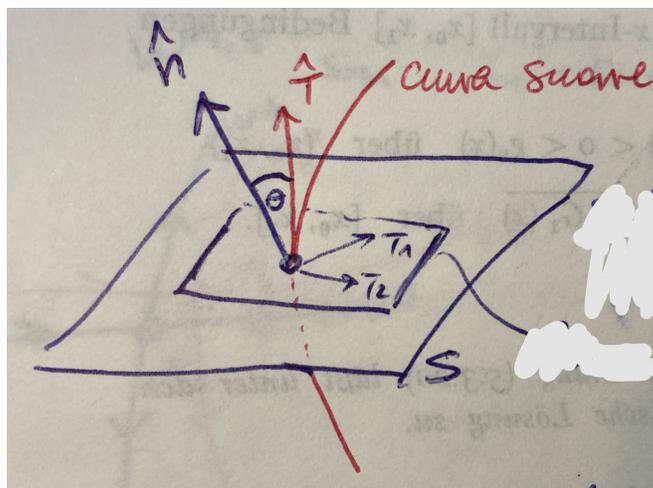


Figura 7.5: Una órbita homoclínica a un equilibrio hiperbólico es estructuralmente inestable.

las variedades. Es decir, si $M_0 \pitchfork N_0$, entonces $M_\epsilon \pitchfork N_\epsilon$ para todo $M_\epsilon \in V(M_0)$ y para todo $N_\epsilon \in V(N_0)$; ver figura 7.6. Por lo tanto, una intersección transversal de dos variedades invariantes de (7.1) es estructuralmente estable.

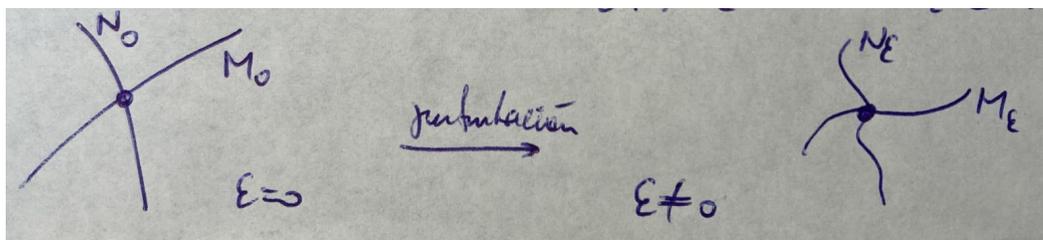


Figura 7.6: Intersecciones transversales persisten bajo pequeñas perturbaciones.

3. Por el contrario, si dos variedades se intersectan no transversalmente, entonces una perturbación genérica rompe la intersección, o bien, la intersección se vuelve transversal; ver figura 7.7. Por lo tanto, una intersección no transversal de dos variedades invariantes de (7.1) es estructuralmente inestable.
4. En esta capítulo consideramos puntos de equilibrio hiperbólicos de tipo silla. El teorema de la variedad estable asegura que sus variedades invariantes W^u y W^s tienen el mismo grado de suavidad que f . Luego, cualquier sistema C^1 -

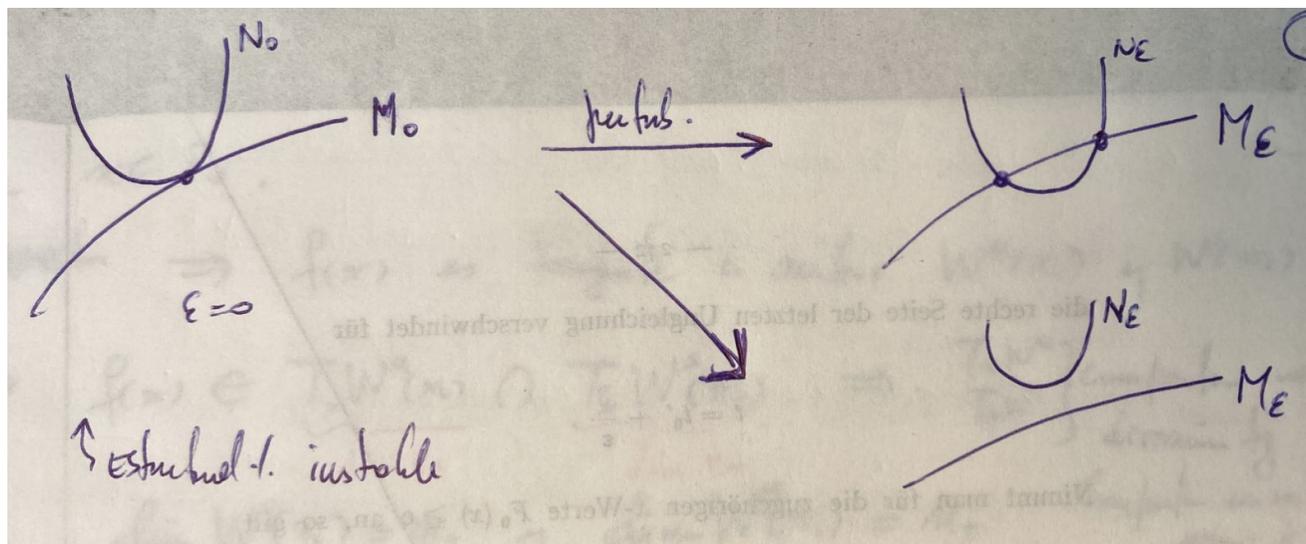


Figura 7.7: Perturbaciones genéricas de intersecciones no transversales rompen la intersección, o bien, provocan que la intersección se vuelva transversal.

cercano posee un punto silla hiperbólico y sus variedades invariantes $W^{u,s}$ son C^1 -cercanas a las originales; ver figura 7.8.

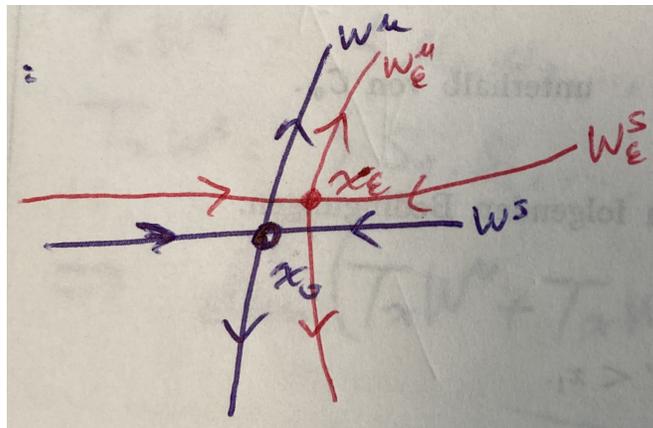


Figura 7.8: Un punto silla hiperbólico y sus variedades invariantes persisten bajo perturbaciones genéricas suficientemente pequeñas.

DEMOSTRACIÓN LEMA 7. Supongamos que el equilibrio hiperbólico x_0 de (7.1) posee n_+ valores propios con parte real positiva y n_- valores propios con parte real negativa, con $n_+ + n_- = n$. Por hipótesis, las variedades $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ se

intersectan a lo largo de una órbita homoclínica Γ_0 . A la luz de las observaciones anteriores, basta probar que la intersección es no transversal.

Sea $x \in \Gamma_0$. Luego el vector $f(x)$ es tangente a ambas variedades $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ en el punto x . Por tanto,

$$f(x) \in T_x W^s(x_0) \cap T_x W^u(x_0),$$

donde $T_x W^{s,u}(x_0)$ denota el espacio tangente a $W^{s,u}(x_0)$ en x . Además notemos que $\dim(T_x W^s(x_0)) = n_-$ y $\dim(T_x W^u(x_0)) = n_+$. Por lo tanto, existen bases de $T_x W^s(x_0)$ y de $T_x W^u(x_0)$, respectivamente, tal que comparten el mismo vector $f(x)$. Sin pérdida de generalidad, si la base de $T_x W^s(x_0)$ es $\{s_1, s_2, \dots, s_{n_- - 1}, f(x)\}$ y la base de $T_x W^u(x_0)$ es $\{u_1, u_2, \dots, u_{n_+ - 1}, f(x)\}$, entonces

$$\dim(T_x W^s(x_0) + T_x W^u(x_0)) \leq n_- + n_+ - 1.$$

Por lo tanto, hay a lo más $n_- + n_+ - 1 = n - 1 \neq n$ vectores linealmente independientes tangentes a estas variedades en x . ■

A la luz del Lema 7, en lo que sigue nuestro objetivo es describir los posibles retratos de fase no equivalentes cerca de un sistema que posea una órbita homoclínica en \mathbb{R}^2 (en la sección 7.2) y en \mathbb{R}^3 (en la sección 7.3) bajo pequeñas perturbaciones C^1 .

OBSERVACIONES.

1. El análisis requerido en este capítulo es más complicado que para bifurcaciones locales, pues en general no existen formas normales topológicas globales para sistemas con órbitas homo/heteroclínicas.
2. En ocasiones, es posible hallar algunas condiciones de genericidad tales que todos los sistemas a un parámetro satisfaciéndolas son topológicamente equivalentes.
3. Sin embargo, hay casos complicados en donde *no hay* equivalencia topológica en sistemas vecinos satisfaciendo las mismas condiciones de genericidad. Esto nos impide encontrar diagramas de bifurcación universales. En estos casos,

de todas formas los distintos retratos de fase no equivalentes poseen ciertos elementos en común y revelan información útil sobre la dinámica.

- Las conexiones heteroclínicas dadas por intersecciones no transversales de variedades invariantes de puntos silla hiperbólicos también son estructuralmente inestables. Sin embargo, el único evento “esencial” es la desaparición de la órbita heteroclínica; ver figura 7.9 con un caso planar.

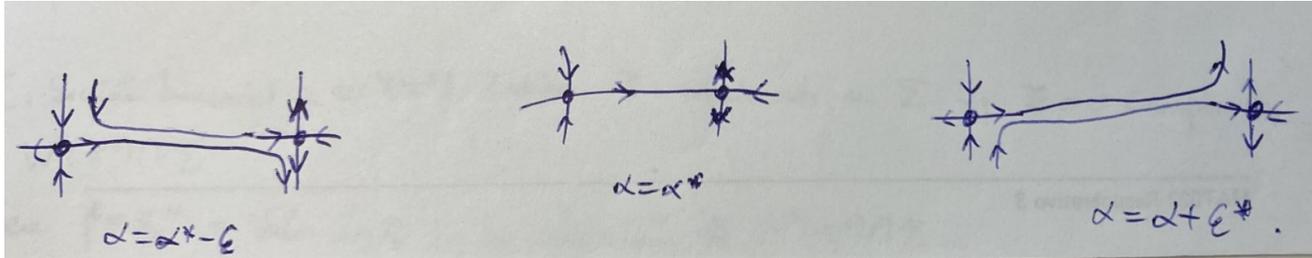


Figura 7.9: Una órbita heteroclínica dada por la intersección no transversal de variedades invariantes es estructuralmente inestable.

- En \mathbb{R}^3 es posible construir sistemas con una órbita heteroclínica estructuralmente estable conectando dos puntos silla mediante la intersección transversal de variedades estable e inestable dos-dimensionales.
- Los sistemas *Hamiltonianos* son una clase especial de sistemas dinámicos para los cuales la presencia de una órbita homoclínica no transversal es genérica.

7.2. Bifurcaciones homoclínicas planares

Considere un sistema dinámico planar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

con f suficientemente suave. Sea x_0 un punto silla hiperbólico y supongamos que para $\alpha = 0$ existe una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 .

Sea Σ una sección transversal unidimensional a la variedad estable local $W^x(x_0)$ en una vecindad de x_0 como en la figura 7.10. Definamos coordenadas locales

en Σ —denotadas por $\xi \in \mathbb{R}$ — tal que $\xi = 0$ corresponde al punto de intersección $\Sigma \cap W^s(x_0)$. Esta construcción se puede repetir para todo campo $f(x, \alpha)$ con α suficientemente pequeño. Sin embargo, notemos que para $\alpha \neq 0$, genéricamente, la variedad inestable $W^u(x_0)$ no retorna a x_0 . Hay dos posibilidades: $W^u(x_0)$ y $W^s(x_0)$ se separan “hacia arriba” o bien “hacia abajo”.

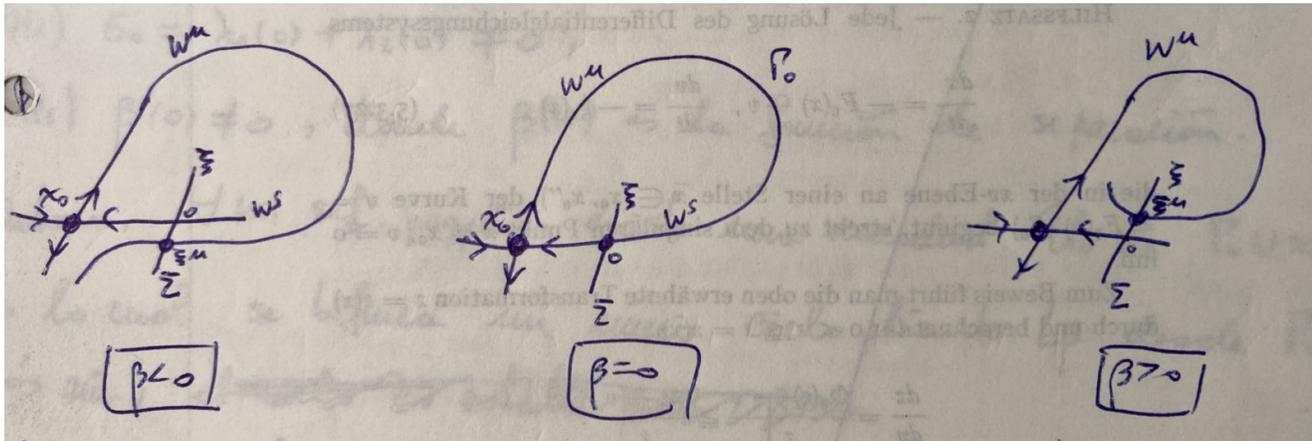


Figura 7.10: Introduciendo una sección transversal Σ a $W^s(x_0)$ se aprecia cómo las variedades invariantes se reorganizan al mover el parámetro α para formar la órbita homoclínica.

Sea ξ^u el valor de la coordenada ξ en la intersección $\Sigma \cap W^u(x_0)$. Notemos que la conexión homoclínica existe ssi $\xi^u = 0$.

Definición 24 El escalar $\beta = \xi^u$ se llama **función de separación**.

La condición $\beta = 0$ es una condición de bifurcación para la bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^2 . Luego, en estas condiciones, la bifurcación homoclínica tiene codimensión uno; ver de nuevo la figura 7.10.

Teorema 20 (Andronov & Leontovich, 1939) Considere un sistema dinámico planar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un punto silla hiperbólico $x_0 = 0$ con valores propios $\lambda_1(0) < 0$ y $\lambda_2(0) > 0$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$.

(H2) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.3) posee (a lo más) un único ciclo límite L_β en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$. Si $\sigma < 0$ el ciclo es estable y existe para $\beta > 0$, y si $\sigma > 0$ el ciclo es inestable y existe para $\beta < 0$.

Definición 25 El número $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ se conoce como **cantidad silla**.

La figura 7.11 ilustra el caso $\sigma < 0$. Para $\beta = 0$ la órbita homoclínica Γ_0 es internamente estable, es decir, atrae a las órbitas vecinas que comienzan en la región encerrada por Γ_0 . Además, el ciclo límite L_β es estable y existe estrictamente para $\beta > 0$. Por el contrario, si $\sigma > 0$, Γ_0 es internamente inestable y el ciclo límite L_β es inestable y existe estrictamente para $\beta < 0$ como se muestra en la figura 7.12.

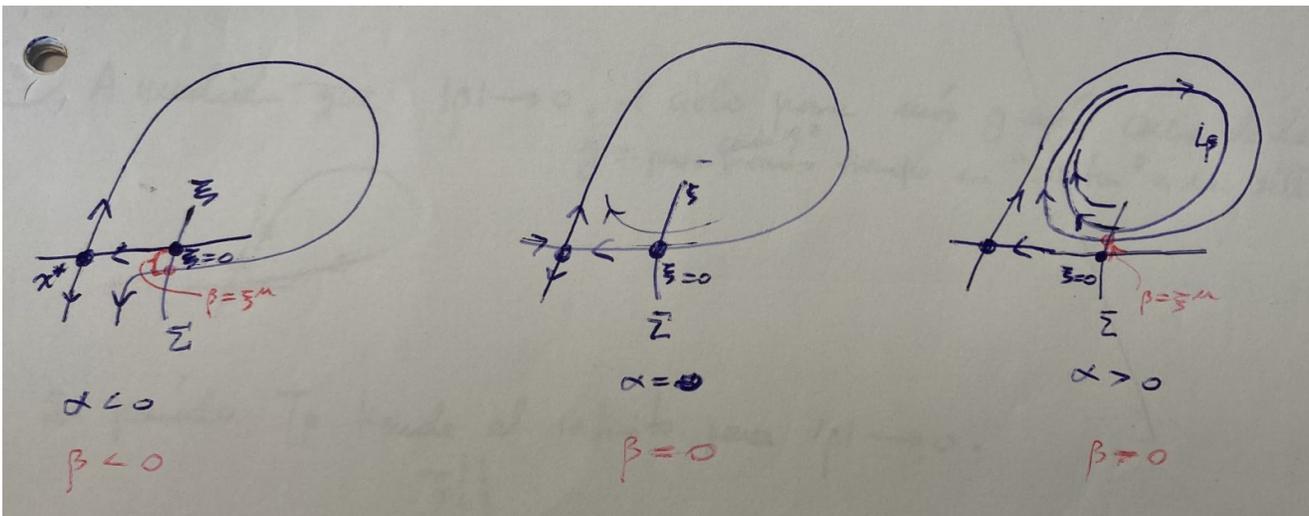


Figura 7.11: Caso $\sigma < 0$. La órbita homoclínica Γ_0 es internamente estable, y el ciclo límite L_β es estable y existe estrictamente para $\beta > 0$.

OBSERVACIONES.

1. Según la condición (H2), la función de separación $\beta = \beta(\alpha)$ puede considerarse como un nuevo parámetro.

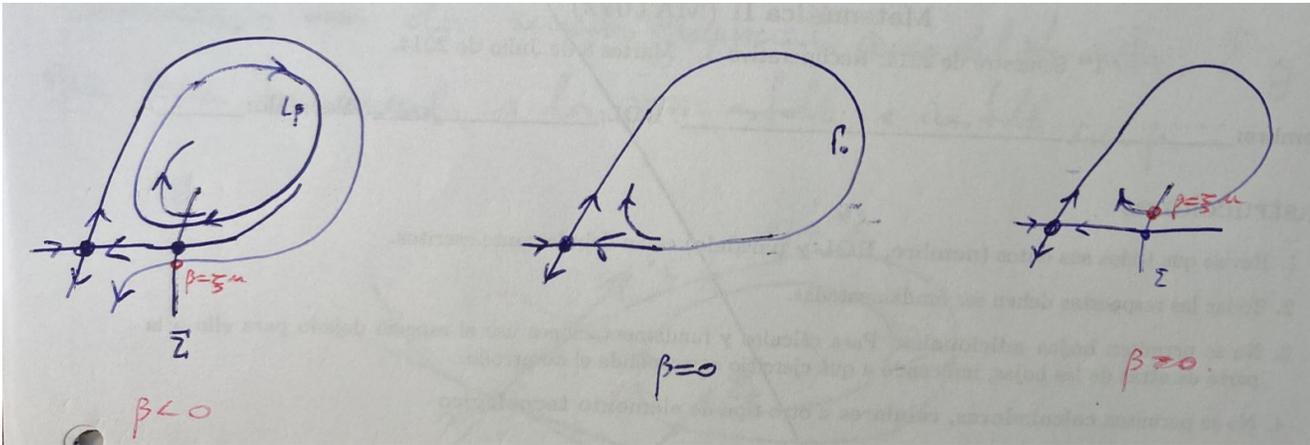


Figura 7.12: Caso $\sigma > 0$. La órbita homoclínica Γ_0 es internamente inestable, el ciclo límite L_β es inestable y existe estrictamente para $\beta < 0$.

2. A medida que $|\beta| \rightarrow 0$, el ciclo L_β pasa cada vez más cerca del punto silla x_0 y le toma cada vez más tiempo “escapar” de la vecindad de x_0 . Como consecuencia, el período T_β de L_β tiende a infinito cuando $|\beta| \rightarrow 0$; ver figura 7.13.

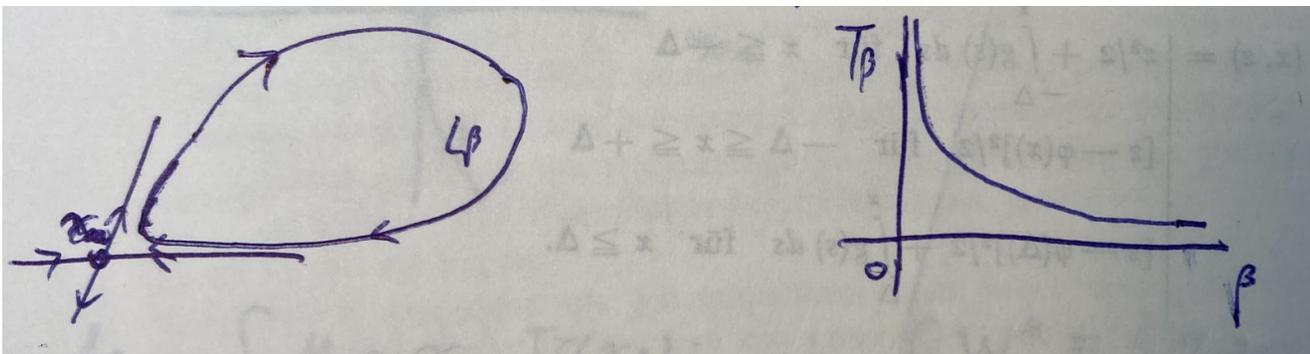


Figura 7.13: El período T_β de L_β tiende a infinito cuando $|\beta| \rightarrow 0$ (Caso $\sigma < 0$).

DEMOSTRACIÓN. Introducimos dos secciones transversales cerca del punto silla: Sea Σ una sección transversal a W^s , y sea Π una sección transversal a W^u . Y sean v_1, v_2 vectores propios asociados respectivamente a λ_1 y λ_2 como en la figura 7.14. Definimos una aplicación de retorno de Poincaré P en la semi-sección

$\Sigma^+ \subset \Sigma$ de la forma

$$P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$$

$$P = Q \circ \Delta,$$

donde $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ es un mapeo “local” en una vecindad de x_0 , y $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ es un mapeo “global”.

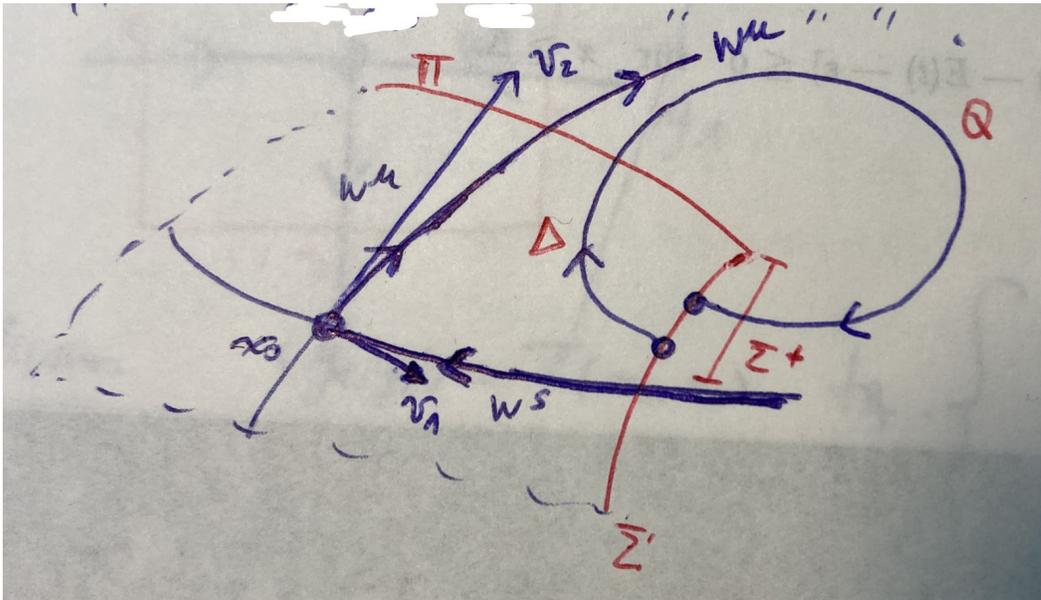


Figura 7.14: Construcción de una aplicación de retorno de Poincaré P cerca de x_0 .

Paso 1: Introducción de coordenadas canónicas. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $x_0 = 0$; de no ser así, siempre podemos llevar el equilibrio al origen mediante una traslación. Dado que x_0 es una silla hiperbólica, existe un cambio de coordenadas lineal e invertible que permite escribir (7.3) en la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

donde (x_1, x_2) son nuevas coordenadas y g_1, g_2 son funciones suaves de orden $O(\|x\|^2)$. Aquí el eje x_1 coincide con E^s y el eje x_2 corresponde a E^u .

Paso 2: Linealización local de las variedades invariantes. Por el teorema de la variedad estable, los conjuntos $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ existen y poseen representaciones

locales dadas por:

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) = \{x_2 = S(x_1), S(0) = S'(0) = 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) = \{x_1 = U(x_2), U(0) = U'(0) = 0\},$$

donde las funciones S, U son tan suaves como el campo f ; ver figura 7.15.

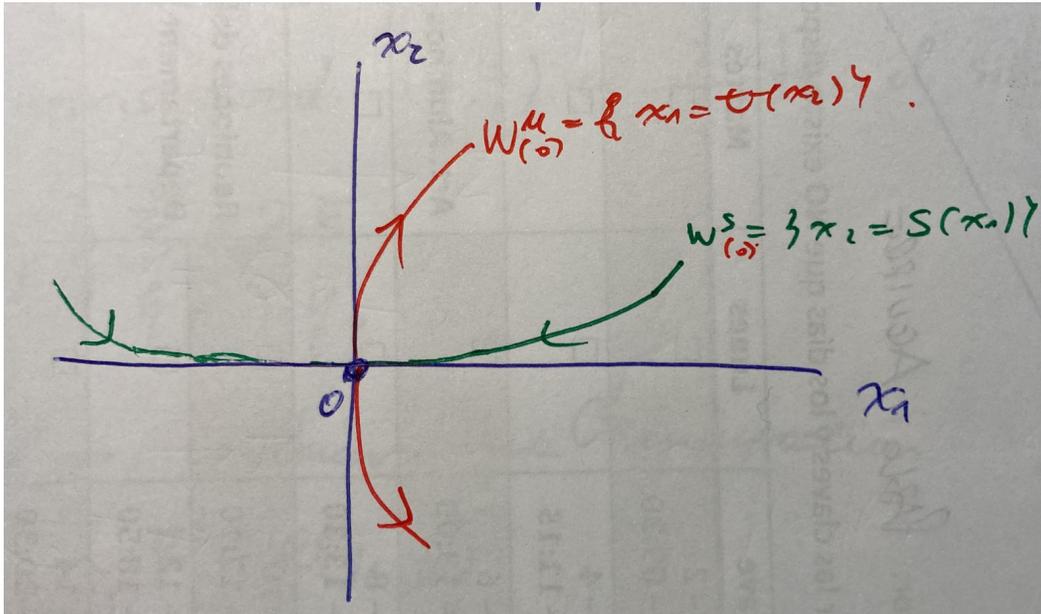


Figura 7.15: Variedades invariantes de x_0 en las coordenadas canónicas.

Definimos el nuevo sistema de coordenadas

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - U(x_2), \\ y_2 = x_2 - S(x_1), \end{cases} \quad (7.4)$$

en una vecindad de $x_0 = 0$. De esta manera obtenemos

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) = \{y_1 = 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) = \{y_2 = 0\},$$

cerca de $(0, 0)$ como en la figura 7.16.

COMENTARIO: Más técnicamente, en el cambio de coordenadas anterior consideramos una transformación global $(y_1, y_2) = T(x_1, x_2)$ tal que: i) T se defina

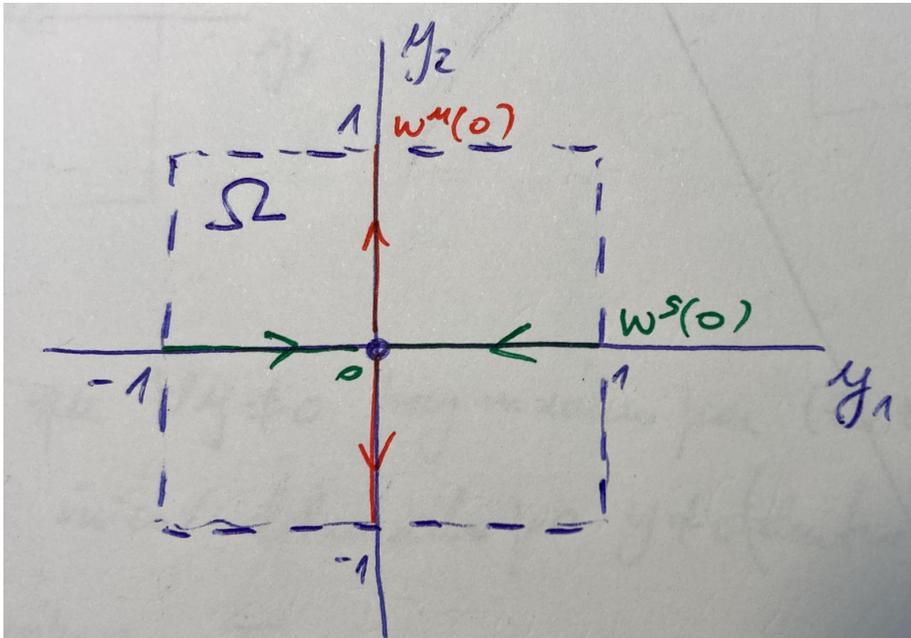


Figura 7.16: Variedades invariantes locales cerca del origen.

como (7.4) en una vecindad de $(0, 0)$; ii) T se defina como la identidad fuera de la vecindad del origen; iii) T sea suave.

En la figura 7.16 podemos asumir que $\Omega = \{(y_1, y_2) : -1 < y_{1,2} < 1\}$, o bien simplemente hacer un rescalamiento apropiado en los ejes.

De esta manera, el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_1 h_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + y_2 h_2(y_1, y_2), \end{cases} \quad (7.5)$$

donde $h_{1,2} = O(\|y\|)$. Aquí, (7.5) es un sistema no lineal suave con un punto silla en el origen cuyas variedades invariantes *locales* son lineales y coinciden con los ejes coordenados en Ω .

Paso 3: Linealización local C^1 del sistema. Introducimos nuevas coordenadas (ξ, η) en Ω tal que el sistema (7.5) se vuelva lineal:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta. \end{cases} \quad (7.6)$$

En otras palabras, construimos una C^1 -conjugación

$$\Phi : \begin{cases} \xi = \varphi(y_1, y_2), \\ \eta = \psi(y_1, y_2), \end{cases}$$

de la siguiente forma: Sea $y \in \Omega$ y consideremos su órbita bajo (7.5) como en la figura 7.17. Sean τ_1, τ_2 los valores absolutos de los tiempos requeridos para que esta órbita llegue a la frontera $\partial\Omega$ desde el punto inicial y . Se puede probar que el par (τ_1, τ_2) queda únicamente determinado para todo $y \neq 0$ en cada cuadrante de Ω y viceversa —Tarea: compruébelo! (Para puntos en los ejes $y_1 = 0$ o $y_2 = 0$ debemos definir $\tau_{1,2} = \infty$).

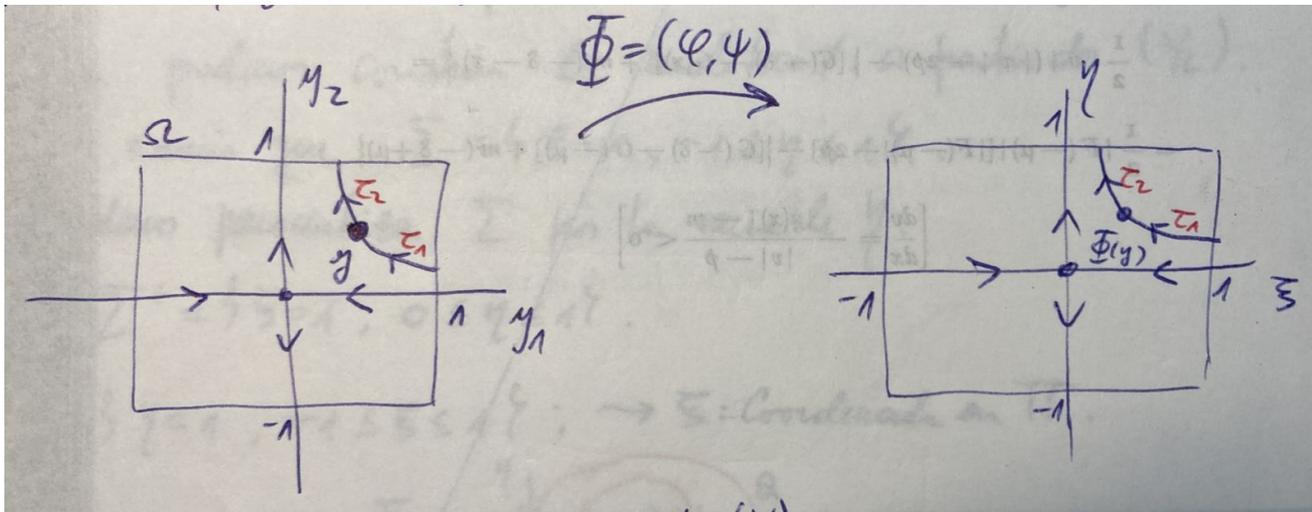


Figura 7.17: Construcción de la transformación $(\xi, \eta) = \Phi(y_1, y_2)$ en Ω .

A continuación definimos la imagen $(\xi_0, \eta_0) = \Phi(y)$ del punto inicial y como aquel punto en Ω con los mismos tiempos de “salida” τ_1, τ_2 bajo (7.6). Luego, basta tomar la órbita correspondiente que pasa por $\Phi(y)$ bajo el flujo lineal de (7.6) dado por:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \\ \eta(t) = \eta_0 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Por ejemplo, sea un punto $(\xi_1, \eta_1) \in \Sigma$ de la forma $\xi_1 = 1, 0 < \eta_1 \leq 1$. El “tiempo de vuelo” T necesario para que la órbita que parte en $(1, \eta_1)$ llegue a Π bajo (7.6)

y la variable ξ actúa como coordenada en Π .

Integrando el sistema lineal (7.6) en Ω obtenemos:

$$\Delta : \Sigma_+ \rightarrow \Pi, \quad \eta \mapsto \xi = \eta^{-\lambda_1/\lambda_2}.$$

Notemos que Δ es no lineal a pesar que (7.6) sea lineal. Además, por continuidad asumimos que $\xi = 0$ para $\eta = 0$. Además, en rigor, $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\beta)$, donde β es la función de separación.

Por otro lado, el mapeo global $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ expresado en términos de (ξ, η) es de clase C^1 e invertible, y tiene la forma

$$\xi \mapsto \eta = \beta + a\xi + O(\xi^2),$$

donde $a = a(\beta) > 0$ pues las órbitas no se pueden intersectar; ver figura 7.18 nuevamente.

Con todo esto, ya podemos calcular $P = Q \circ \Delta$ quedando de la forma:

$$P : \Sigma_+ \rightarrow \Sigma, \quad \eta \mapsto \beta + a\eta^{-\lambda_1/\lambda_2} + \dots .$$

Analicemos los puntos fijos de P con $|\eta|$ pequeño y para $|\beta|$ pequeño, es decir, buscamos órbitas periódicas cerca del punto silla, candidatas a bifurcarse en la órbita homoclínica. Notemos que $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ssi $-\lambda_1/\lambda_2 > 1$. Observando los posibles gráficos de P en la figura 7.19, podemos concluir lo siguiente: En el caso $\sigma < 0$, P posee un único punto fijo no trivial —i.e., ciclo límite en el sistema original— el cual existe para $\beta > 0$; en cambio, si $\sigma > 0$, hay un único punto fijo no trivial el cual existe para $\beta < 0$. La estabilidad del ciclo sigue de analizar el mapeo P en cada caso. ■

COMENTARIOS.

1. También es posible considerar órbitas homoclínicas “grandes” como la de la figura 7.20. En estos casos, el teorema anterior también sigue siendo válido.
2. La condición (H2) del teorema ($\beta'(0) \neq 0$) es equivalente a la transversalidad de la intersección de ciertas variedades invariantes del sistema extendido

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0. \end{cases}$$

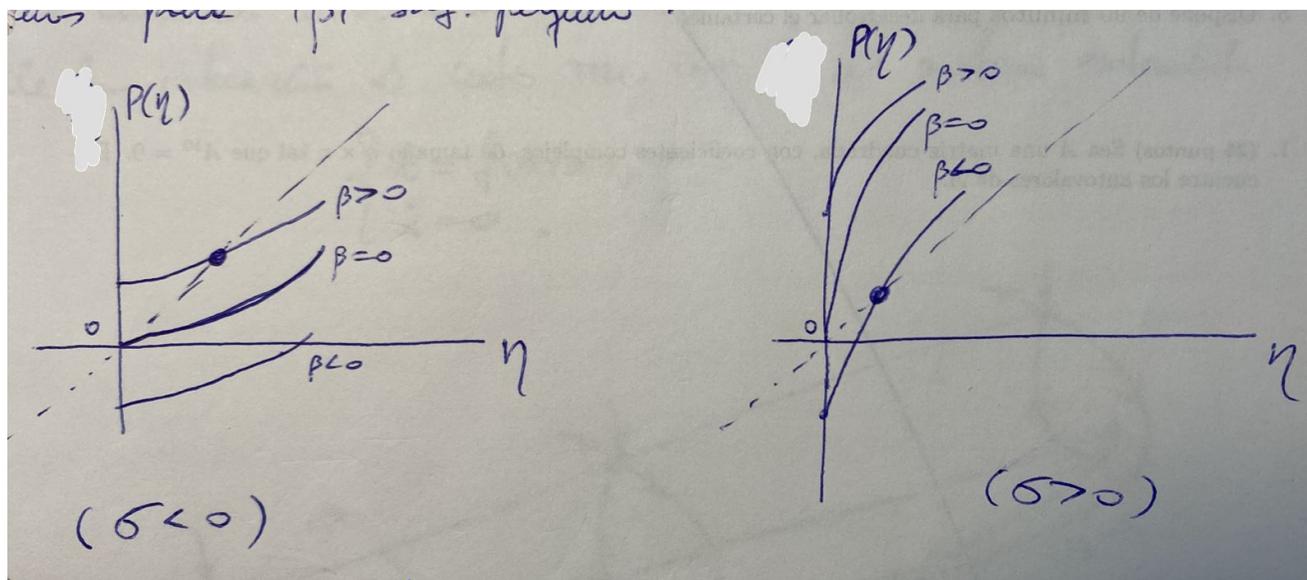


Figura 7.19: Análisis de los puntos fijos de P en los casos $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ (izquierda) y $\sigma > 0$ (derecha).

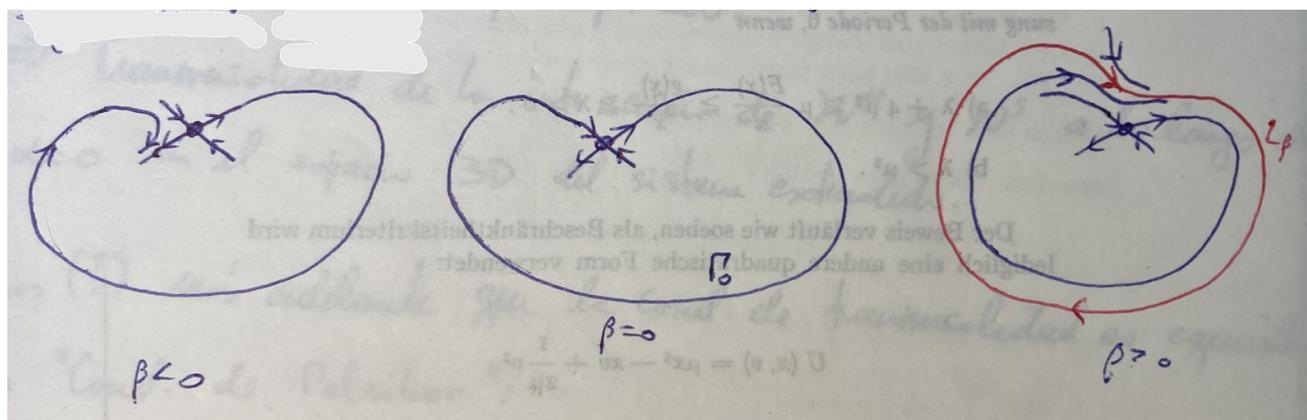


Figura 7.20: Aplicación del teorema anterior para la bifurcación de una órbita homoclínica de gran amplitud en el caso $\sigma < 0$.

En efecto, sea $x_0(\alpha)$ la familia de puntos silla para $|\alpha|$ pequeño. Esta familia define una variedad de equilibrios en el espacio extendido (α, x) . Esta familia posee variedades estable e inestable bidimensionales \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u foliadas por $W^s(x_0(\alpha))$ y $W^u(x_0(\alpha))$, respectivamente. Es decir, cada sección transversal $\alpha = \text{cte}$ coincide con las variedades unidimensionales $W^s(x_0(\alpha))$ y $W^u(x_0(\alpha))$, respectivamente; ver figura 7.21. La condición (H2) significa

que \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u se separan con velocidad no nula a medida que α pasa por $\alpha^* = 0$. Esto es, las variedades \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u se intersectan transversalmente a lo largo de Γ_0 en $\alpha = 0$ en el espacio tridimensional del sistema extendido.

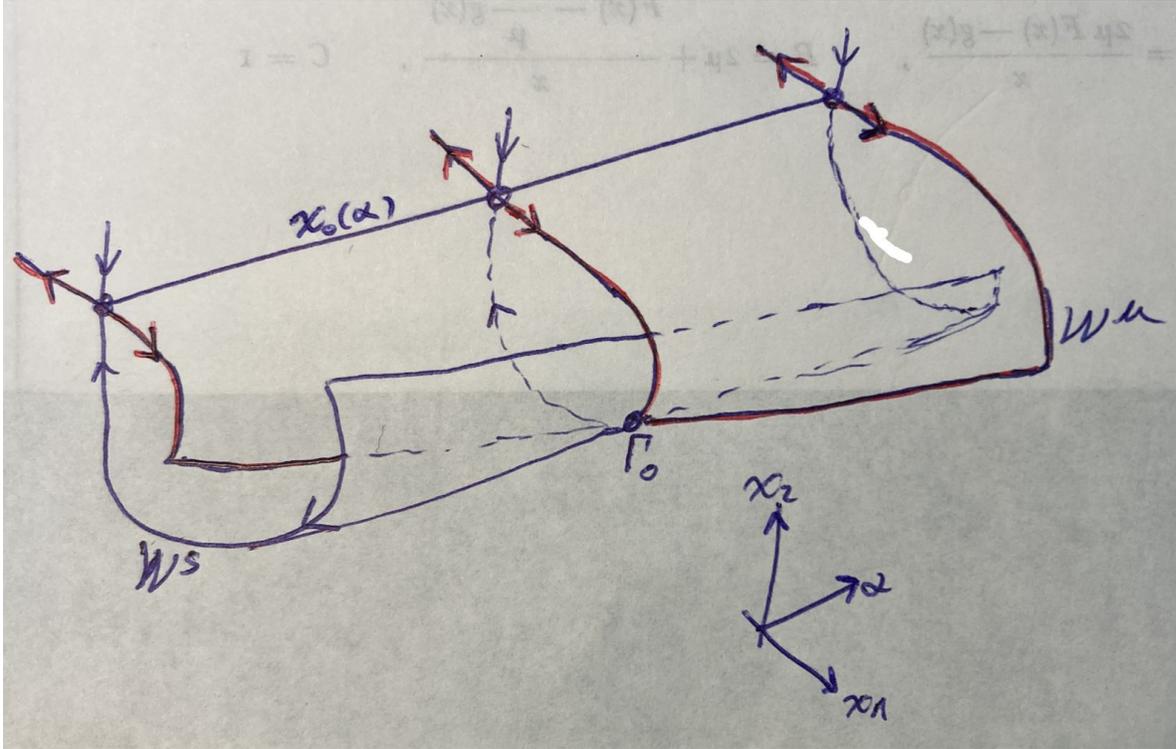


Figura 7.21: La condición (H2) significa que las variedades \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u se intersectan transversalmente a lo largo de Γ_0 en $\alpha = 0$ en el espacio extendido (α, x_1, x_2) .

Es posible probar que esta condición de transversalidad es equivalente a la llamada *condición de Melnikov*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right) \exp \left\{ - \int_0^t \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) d\tau \right\} dt \neq 0,$$

donde el campo $f = (f_1, f_2)^t$ está evaluado en $\alpha = 0$ a lo largo de una solución $x^0(\cdot)$ de (7.3) que corresponda a la órbita homoclínica Γ_0 .

7.3. Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3

En sistemas tridimensionales se tienen dos tipos de puntos silla hiperbólicos:

1. Silla: Corresponde al caso de tres valores propios reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
2. Silla-foco: Corresponde al caso de dos valores propios complejos y uno real $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Esta distinción es esencial pues la naturaleza de la bifurcación homoclínica en tres dimensiones dependerá fuertemente de si estamos en el caso de una silla o de un punto silla-foco. En esta exposición asumiremos que el punto silla posee una variedad estable W^s de dimensión dos y una variedad inestable W^u de dimensión uno. La figura 7.22 muestra los retratos de fase respectivos. Note que los casos opuestos —i.e., $\dim W^s = 1, \dim W^u = 2$ — pueden tratarse de manera análoga invirtiendo el sentido del tiempo.

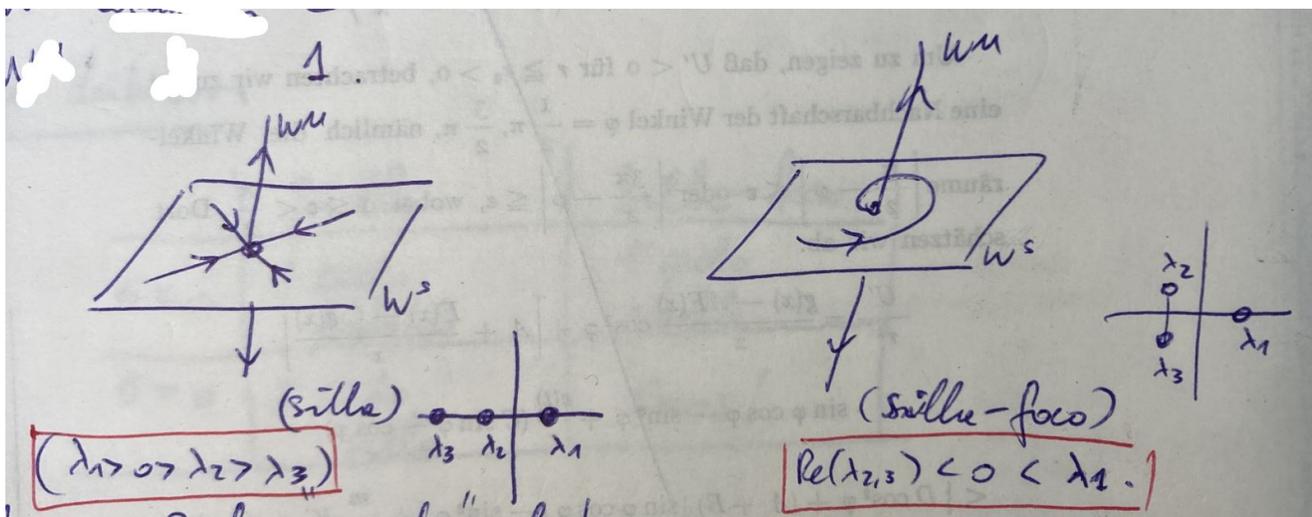


Figura 7.22: Retratos de fase cerca de un punto silla y un silla-foco con variedad estable bidimensional y variedad inestable unidimensional.

Definición 26 *Los valores propios con parte real más cercana al eje imaginario se llaman valores propios principales. El correspondiente espacio propio se dice espacio propio principal.*

En nuestros casos a considerar, en la figura 7.22 el valor propio estable principal del punto silla es λ_2 ; luego, la teoría de equilibrios hiperbólicos nos asegura que casi todas las órbitas en W^s (i.e., todas las órbitas genéricas en W^s) se aproximan al equilibrio tangentes al espacio propio principal (unidimensional) asociado

a λ_2 ; la excepción son solo dos órbitas las cuales convergen a x_0 tangentes al espacio propio asociado a λ_3 . Por otro lado, en el caso silla-foco los valores propios principales son λ_2 y $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ y el espacio propio principal es bidimensional.

Definición 27 *Definimos la **cantidad silla** σ como la suma del valor propio positivo y la parte real de un valor propio principal. Concretamente tenemos:*

1. *Silla:* $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. *Silla-foco:* $\sigma = \lambda_1 + \text{Re}(\lambda_{2,3})$.

El cuadro 7.1 muestra los principales eventos u objetos que da lugar una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 —estos pueden ser dramáticamente distintos dependiendo de la naturaleza del punto de equilibrio y del signo de la cantidad silla. Probaremos estos resultados —descubiertos por L. P. Shilnikov (1934–2011)—, a continuación.

| | silla | silla-foco |
|--------------|-----------------|-----------------|
| $\sigma < 0$ | 1 ciclo estable | 1 ciclo estable |
| $\sigma > 0$ | 1 ciclo silla | caos! |

Cuadro 7.1: Los teoremas de Shilnikov — Una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 puede tener consecuencias muy distintas dependiendo del punto de equilibrio y del signo de la cantidad silla σ .

7.3.1. Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 — Caso silla

Teorema 21 *(Silla, $\sigma < 0$) Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.7}$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla $x_0 = 0$ con valores propios $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) \geq \lambda_3(0)$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) Γ_0 regresa a x_0 (para $t \rightarrow \infty$) tangente al espacio propio principal.

(H4) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.7) posee un único ciclo límite L_β en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Además, el ciclo L_β es estable. Más aún, todos estos sistemas son localmente topológicamente equivalentes cerca de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Bajo las condiciones del teorema anterior, una bifurcación homoclínica a un punto silla en \mathbb{R}^3 con $\sigma < 0$ es completamente análoga al caso planar; ver figura 7.23 y compare con la figura 7.11.

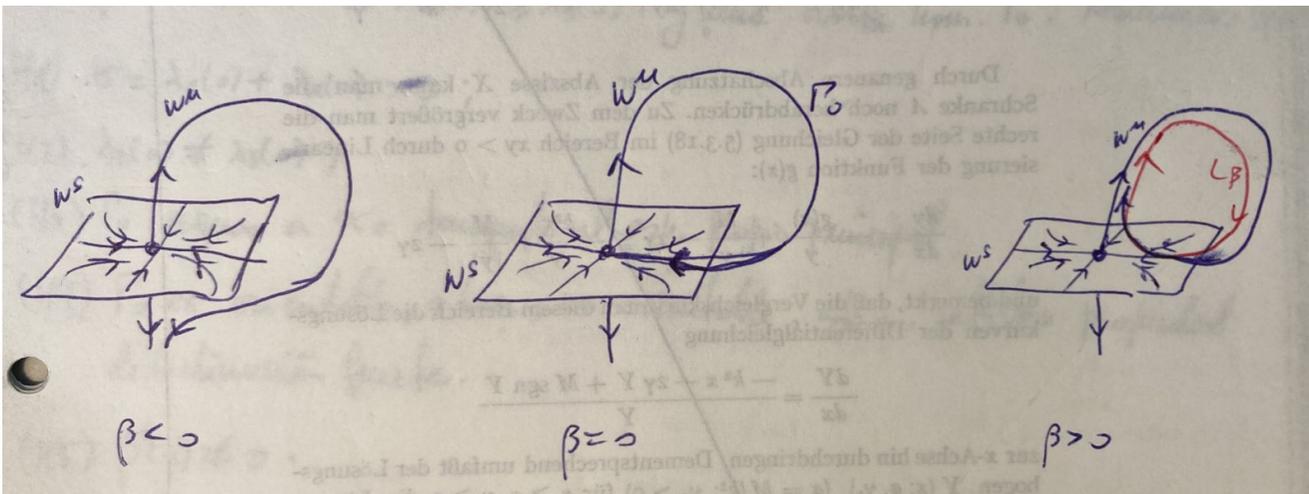


Figura 7.23: Caso $\sigma < 0$ cuando el equilibrio es una silla con valores propios reales — Al romperse la órbita homoclínica Γ_0 se bifurca un único ciclo límite L_β el cual es estable y existe estrictamente para $\beta > 0$.

Sin embargo, las similitudes terminan ahí. Efectivamente, si $\sigma > 0$ debemos distinguir dos casos topológicamente no equivalentes, los cuales dependen de la topología de $W^s(x_0)$ cerca de Γ_0 . Fijemos una vecindad pequeña U_0 de $\Gamma_0 \cap x_0$. La órbita homoclínica Γ_0 está enteramente contenida en la variedad estable $W^s(x_0)$. Por lo tanto, la variedad $W^s(x_0)$ se puede extender “hacia atrás en el tiempo” a lo largo de Γ_0 dentro de esta vecindad fija. En cada punto $\varphi^t(x) \in \Gamma_0$ es posible definir un plano tangente a esta variedad. Para $t \rightarrow \infty$ este plano coincide con E^s . Por otro lado, para $t \rightarrow -\infty$, genéricamente, $W^s(x_0)$ se acerca al plano

generado por el vector propio inestable v_1 y el vector propio no principal v_3 . Luego, genéricamente, la variedad $W^s(x_0)$ se intersecta a sí misma —más bien, su clausura se intersecta— cerca del punto silla a lo largo de la **variedad estable fuerte** $W^{ss}(x_0)$, la cual es una subvariedad de dimensión 1 asociada al valor propio estable no principal λ_3 ; ver figura 7.24.

Por lo tanto, la parte de $W^s(x_0)$ en U_0 a la cual pertenece Γ_0 es (genéricamente) una subvariedad bidimensional no suave \mathcal{M} . La figura 7.24 muestra los dos casos posibles: En el primero, \mathcal{M} forma una superficie orientable (i.e., equivalente a un cilindro topológico) y uno habla de una bifurcación homoclínica **orientable**; en cambio, en el segundo caso, \mathcal{M} es topológicamente equivalente a una cinta de Möbius y uno dice que ocurre una bifurcación homoclínica **no orientable**.

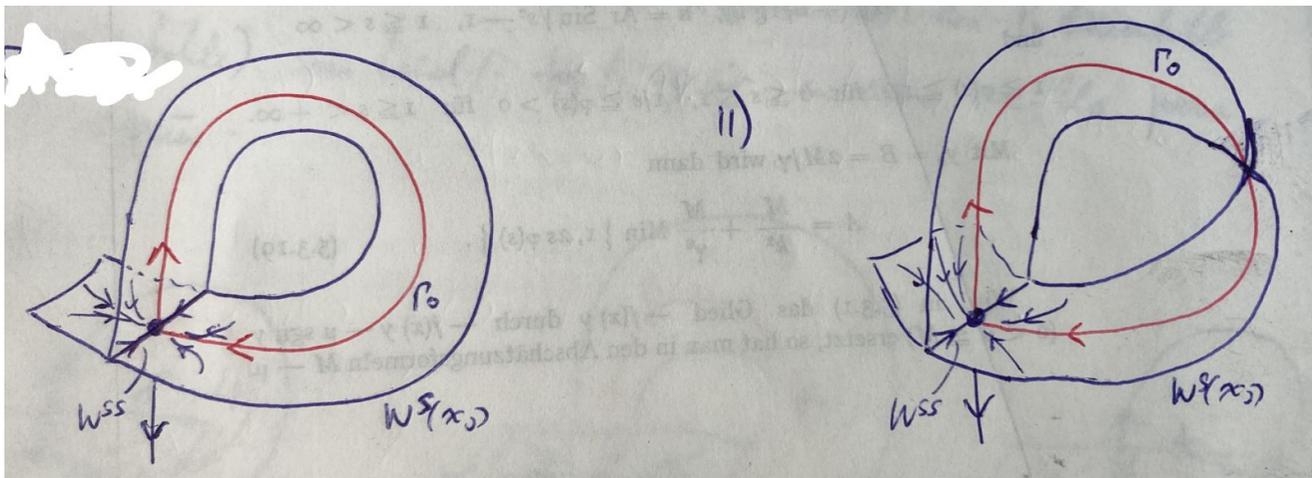


Figura 7.24: La variedad estable $W^s(x_0)$ puede “cerrarse” formando localmente una superficie orientable o no orientable.

Teorema 22 (Silla, $\sigma > 0$) *Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.8)$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla $x_0 = 0$ con valores propios $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) \geq \lambda_3(0)$, y una una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) Γ_0 regresa a x_0 (para $t \rightarrow \infty$) tangente al espacio propio principal.

(H4) Γ_0 es orientable, o bien, no orientable.

(H5) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces, para todo $|\alpha| \neq 0$ suficientemente pequeño existe una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ en la cual se bifurca (a lo más) un único ciclo límite L_β desde Γ_0 , y que además es un ciclo de tipo silla. El ciclo existe para $\beta < 0$ si Γ_0 es orientable, y para $\beta > 0$ si Γ_0 es no orientable. Más aún, todos los sistemas (7.8) con Γ_0 orientable (resp. no orientable) son localmente topológicamente equivalentes en una vecindad U_0 para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

La figura 7.25 muestra este resultado en el caso orientable mientras que el caso no orientable aparece en la figura 7.26.

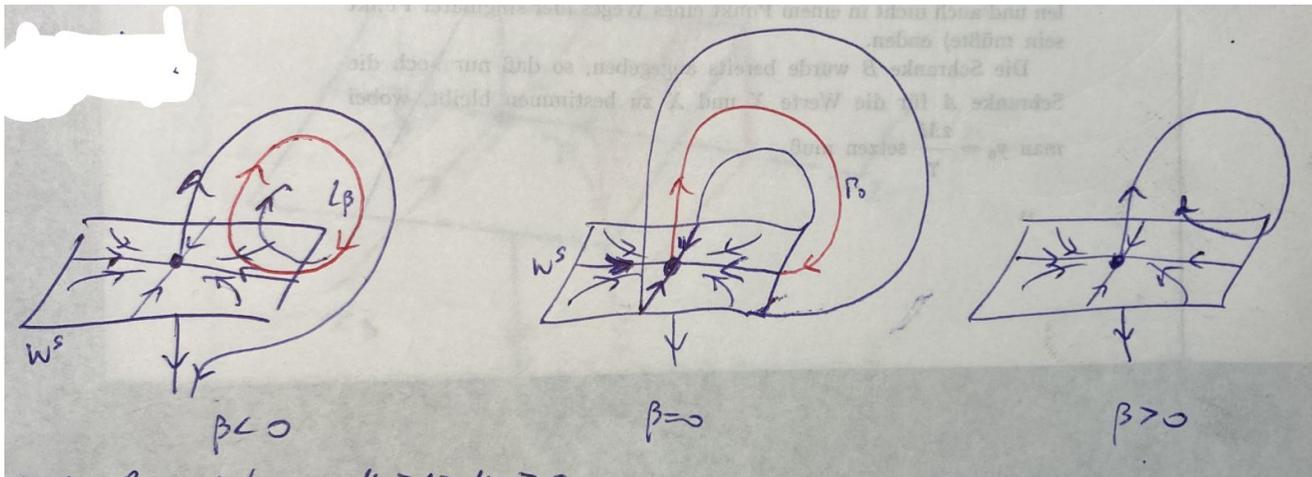


Figura 7.25: Bifurcación homoclínica orientable en \mathbb{R}^3 con $\sigma > 0$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 21 Y 22. Sin pérdida de generalidad supongamos que el equilibrio silla está en el origen $x_0 = 0$. Tomemos coordenadas en \mathbb{R}^3 tal que la variedad estable $W_{loc}^s(x_0)$ esté localmente contenida en el plano $x_1 = 0$ y $W_{loc}^u(x_0)$ esté localmente contenida en el eje $x_2 = x_3 = 0$ como en la figura 7.27. Podemos asumir que el campo (7.8) ya está escrito en

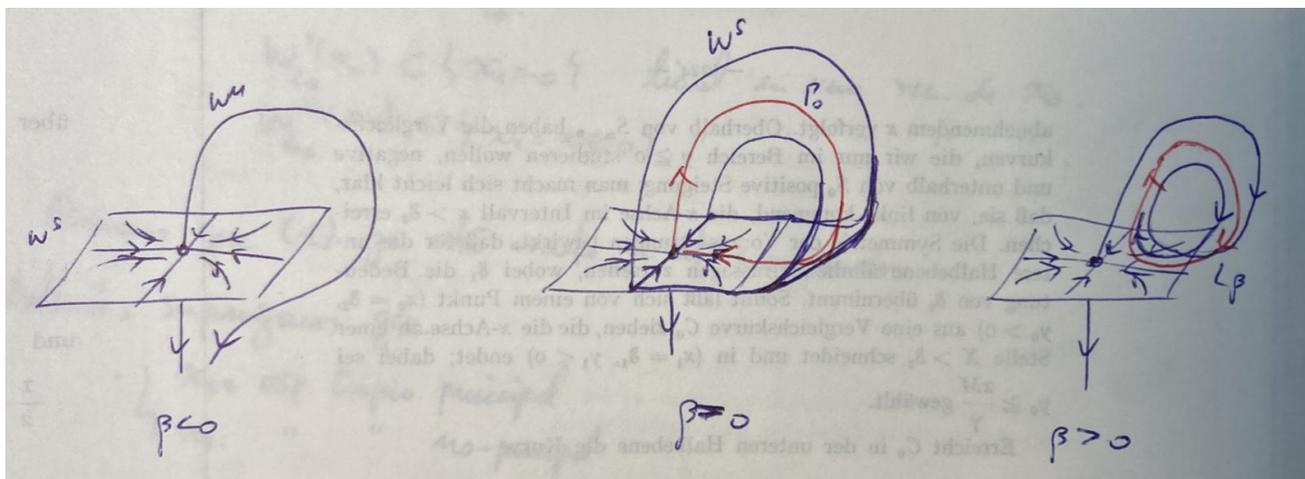


Figura 7.26: Bifurcación homoclínica no orientable en \mathbb{R}^3 con $\sigma > 0$.

estas coordenadas. Además, supongamos que en $W_{loc}^s(x_0)$, el eje x_2 corresponde al espacio propio principal y el eje x_3 es el espacio propio no principal. Sean las secciones transversales $\Sigma \subset \{x_2 = \epsilon_2\}$ y $\Pi \subset \{x_1 = \epsilon_1\}$, para $\epsilon_{1,2} > 0$ pequeños. Supongamos que la órbita homoclínica Γ_0 intersecta ambas secciones Σ y Π .

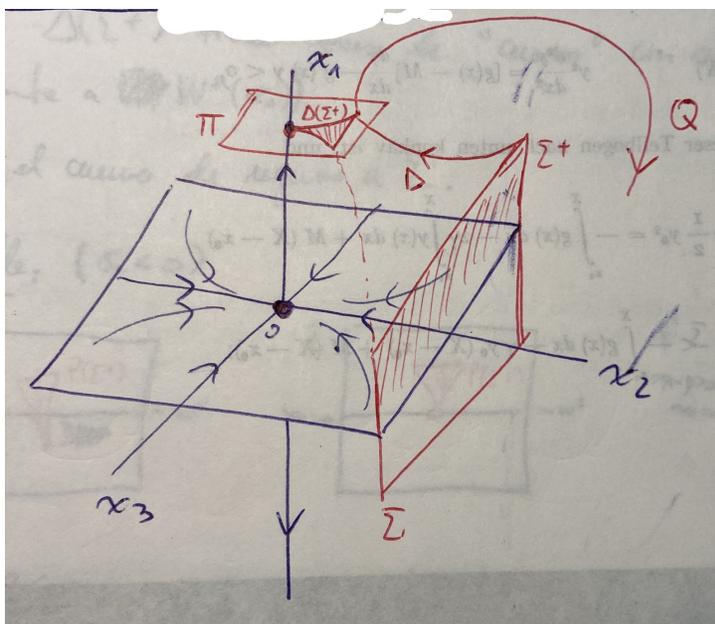


Figura 7.27: Análisis de la composición $P = Q \circ \Delta$.

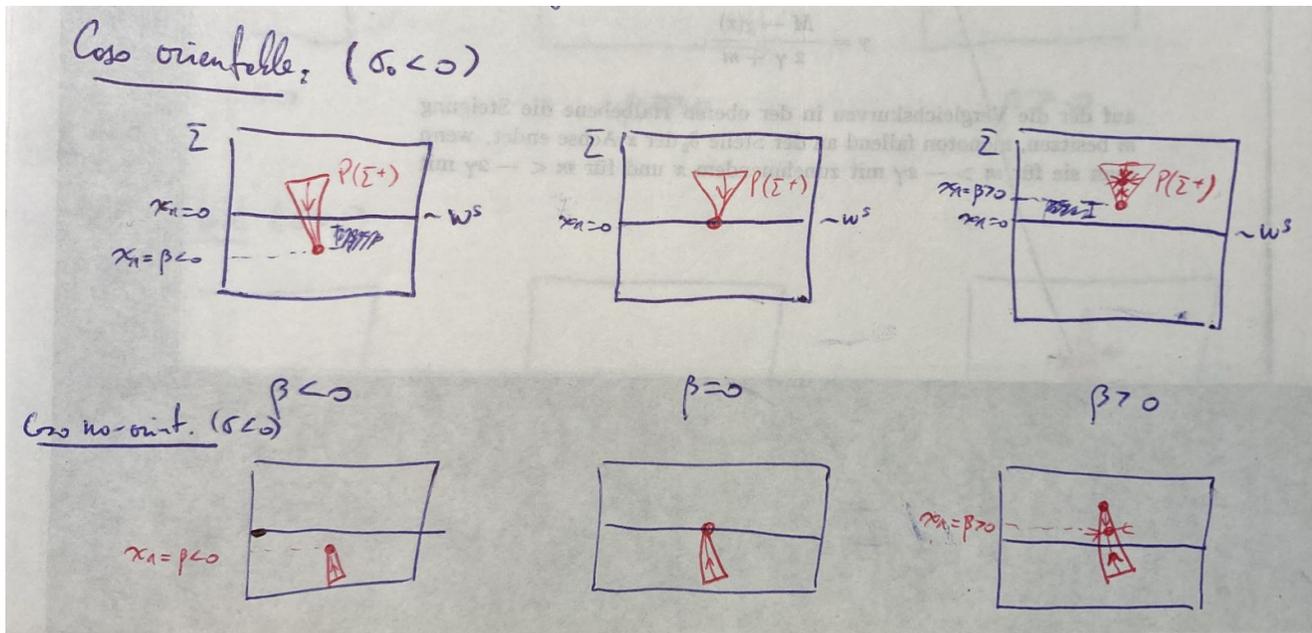


Figura 7.28: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso $\sigma < 0$.

Similarmente al caso planar, definimos una aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ a lo largo de órbitas de (7.8) como la composición $P = Q \circ \Delta$, donde $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ es un mapeo local cerca de la silla y $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ es una aplicación a lo largo de la parte global de Γ_0 . El mapeo local queda determinado esencialmente por la parte lineal de (7.8) cerca de la silla. Notemos que la imagen $\Delta(\Sigma^+) \subset \Pi$ por Δ del rectángulo Σ^+ tiene la forma de un “cuerno” cuya punta se ubica en el eje x_1 (de hecho, la punta puede considerarse como la imagen de todo el segmento $\Sigma^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y coincide con la intersección $W^u(x_0) \cap \Pi$). Este cuerno es luego mapeado por Q de regreso a Σ ; la manera en que queda definida esta imagen $P(\Sigma^+)$ en Σ depende de la orientabilidad de la bifurcación como en la figura 7.28 para el caso $\sigma < 0$ y en la figura 7.29 para el caso $\sigma > 0$. Para $\beta = 0$, si Γ_0 es orientable, $P(\Sigma^+)$ se interseca no trivialmente con Σ^+ ; de lo contrario, si Γ_0 es no-orientable, la intersección con $\Sigma^- \equiv \Sigma \setminus \Sigma^+$ es no trivial; ver figura 7.27. En las figuras 7.28 y 7.29, la punta del cuerno $P(\Sigma^+)$ corresponde a la imagen de $W^u(x_0)$ bajo Q . Luego, por definición de la función de separación β , esta punta debe ubicarse en Σ^+ si $\beta > 0$, y en Σ^- si $\beta < 0$. Por otro lado, debido a la orientabilidad (resp. no orientabilidad) de \mathcal{M} , $P(\Sigma^+)$ se interseca

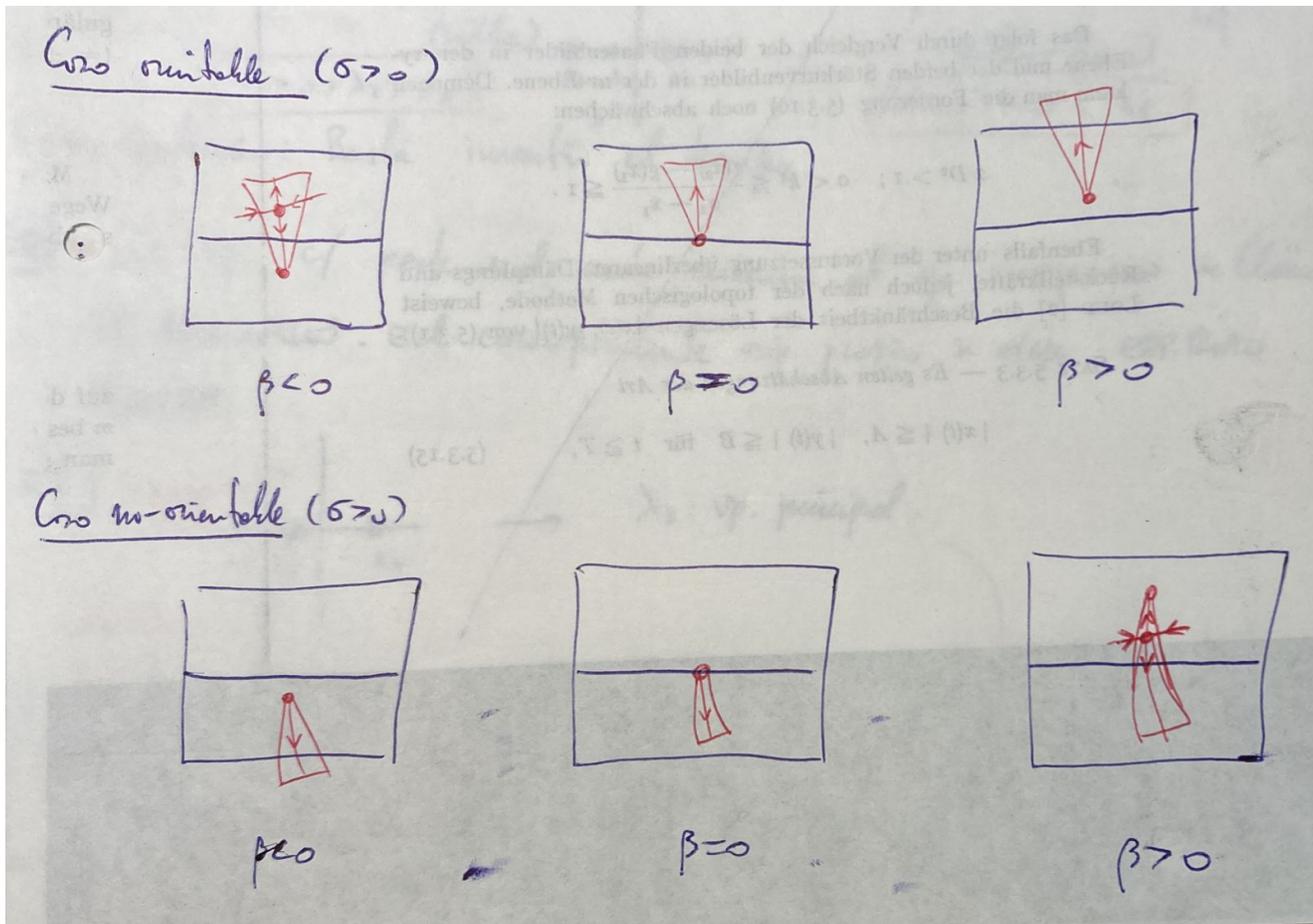


Figura 7.29: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso $\sigma > 0$.

transversalmente con $W^s(x_0) \cap \Sigma$ —i.e., con el eje $x_1 = 0$ — para $\beta < 0$ (resp. $\beta > 0$).

Notemos que P siempre actúa como una contracción a lo largo del eje x_3 . Luego, el análisis de puntos fijos de P se puede reducir a un mapeo unidimensional de la forma

$$x_1 \mapsto \beta + Ax_1^{-\lambda_1/\lambda_2} + \dots,$$

donde $A > 0$ en el caso orientable y $A < 0$ en el caso no orientable. Por lo tanto, si $\sigma < 0$, P actúa como una contracción en Σ^+ para $\beta > 0$ y, luego, posee un único punto fijo que es estable en $P(\Sigma^+)$ y que corresponde a un ciclo en el sistema completo (7.8); ver figura 7.28.

Análogamente, si $\sigma > 0$, P contrae a lo largo del eje x_3 y expande en la dirección longitudinal al cuerno. Por lo tanto, existe un punto fijo silla en Σ^+ para $\beta < 0$ o $\beta > 0$ dependiendo de la orientabilidad; ver figura 7.29. ■

7.3.2. Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 — Caso silla-foco

Teorema 23 (*Silla-foco, $\sigma < 0$*) *Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.9)$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla-foco $x_0 = 0$ con valores propios satisfaciendo $\lambda_1(0) > 0 > \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(0))$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(0)) < 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.9) posee una única órbita periódica L_β en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Además, el ciclo L_β es estable.

La figura 7.30 ilustra este teorema. Si $\beta \leq 0$ el sistema no posee órbitas periódicas en la vecindad U_0 . En cambio, si $\beta > 0$ la rama superior de $W^u(x_0)$ tiende al ciclo límite estable L_β para $t \rightarrow \infty$. Además, el período de L_β tiende a ∞ a medida que $\beta \rightarrow 0^+$. Por lo tanto, en lo que respecta a la existencia, unicidad y estabilidad de L_β , la bifurcación homoclínica silla-foco con $\sigma < 0$ es también análoga al caso planar. Sin embargo, no todos los sistemas de la forma (7.9) satisfaciendo las condiciones de genericidad del teorema son topológicamente equivalentes entre sí. En general, no son equivalentes pues el número

$$\nu_0 = -\frac{\lambda_1(0)}{\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(0))} \quad (7.10)$$

es un invariante topológico para sistemas con una órbita homoclínica a un silla-foco.

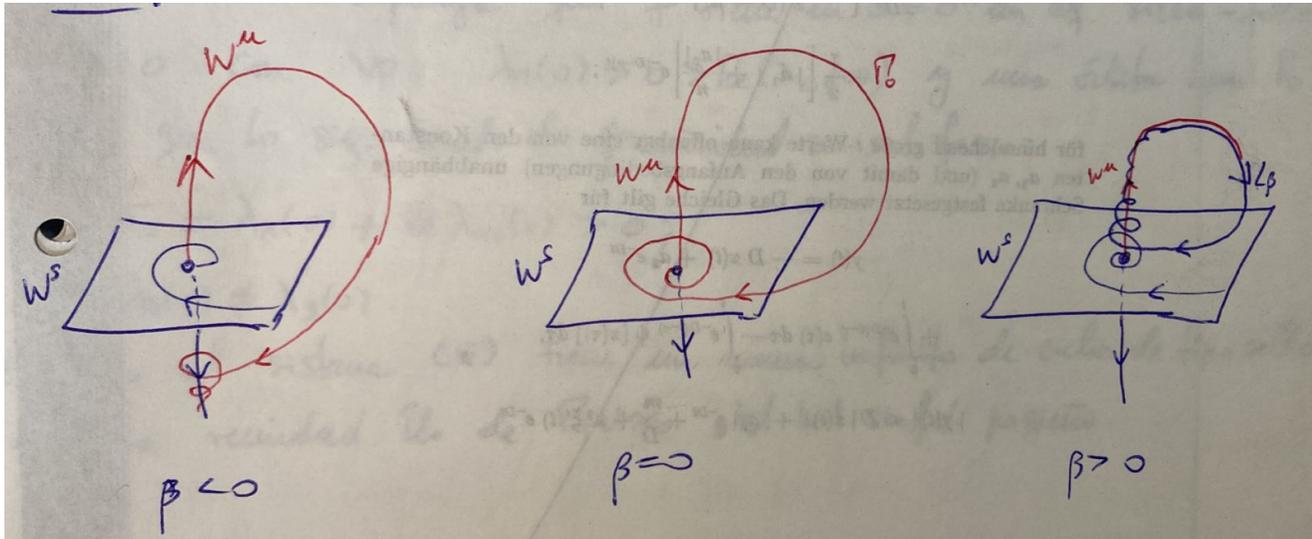


Figura 7.30: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso $\sigma > 0$.

Teorema 24 (*Silla-foco, $\sigma > 0$*) Considere un sistema dinámico tridimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.11}$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla-foco $x_0 = 0$ con valores propios satisfaciendo $\lambda_1(0) > 0 > \text{Re}(\lambda_{2,3}(0))$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \text{Re}(\lambda_{2,3}(0)) > 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.11) tiene un número infinito de ciclos de tipo silla en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

IDEA DE LAS DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS 23 Y 24. El primer paso es seleccionar un sistema de coordenadas tal que $W^s(x_0)$ corresponda localmente al plano $x_1 = 0$ (i.e., el plano (x_2, x_3)) y $W^u(x_0)$ sea localmente la recta $x_2 = x_3 = 0$ (i.e., el eje x_1) como en la figura 7.31. Similarmente a las demostraciones anteriores, definamos dos secciones transversales Σ y Π en una vecindad de x_0 .

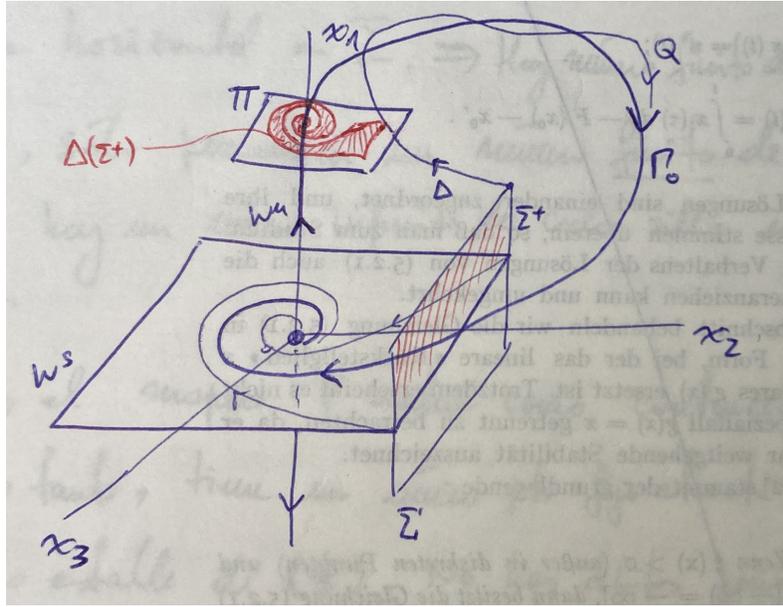


Figura 7.31: Análisis de la composición $P = Q \circ \Delta$.

Concretamente, consideremos $\Sigma \subset \{x_2 = \epsilon_2\}$ y $\Pi \subset \{x_1 = \epsilon_1\}$, para $\epsilon_{1,2} > 0$ pequeños. Supongamos que la órbita homoclínica Γ_0 intersecta ambas secciones Σ y Π .

Similarmente al caso planar, definimos una aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ a lo largo de órbitas de (7.11) como la composición $P = Q \circ \Delta$, donde $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ es un mapeo local y $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ es una aplicación a lo largo de la parte global de Γ_0 . Al igual que en el caso silla, el mapeo local queda determinado esencialmente por la parte lineal de (7.8) cerca de la silla. Notemos que la imagen $\Delta(\Sigma^+) \subset \Pi$ por Δ del rectángulo Σ^+ tiene la forma de una “espiral sólida” —también llamada *serpiente de Shilnikov*— cuyo extremo central se ubica en el eje x_1 (de hecho, ese punto puede considerarse como la imagen de todo el segmento $\Sigma^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y coincide con la intersección $W^u(x_0) \cap \Pi$).

Consideremos el caso $\beta = 0$, es decir, en el momento en que existe la órbita homoclínica Γ_0 . Miremos con atención el conjunto $P(\Sigma^+) \subset \Sigma$. El origen de la “serpiente” es mapeado por Q en la intersección de Γ_0 con Σ ubicada en el plano $x_1 = 0$. Dependiendo del signo de σ se tienen los bosquejos de la figura 7.32. Notemos que la intersección de Σ con $W^s(x_0)$ divide a la serpiente en un número

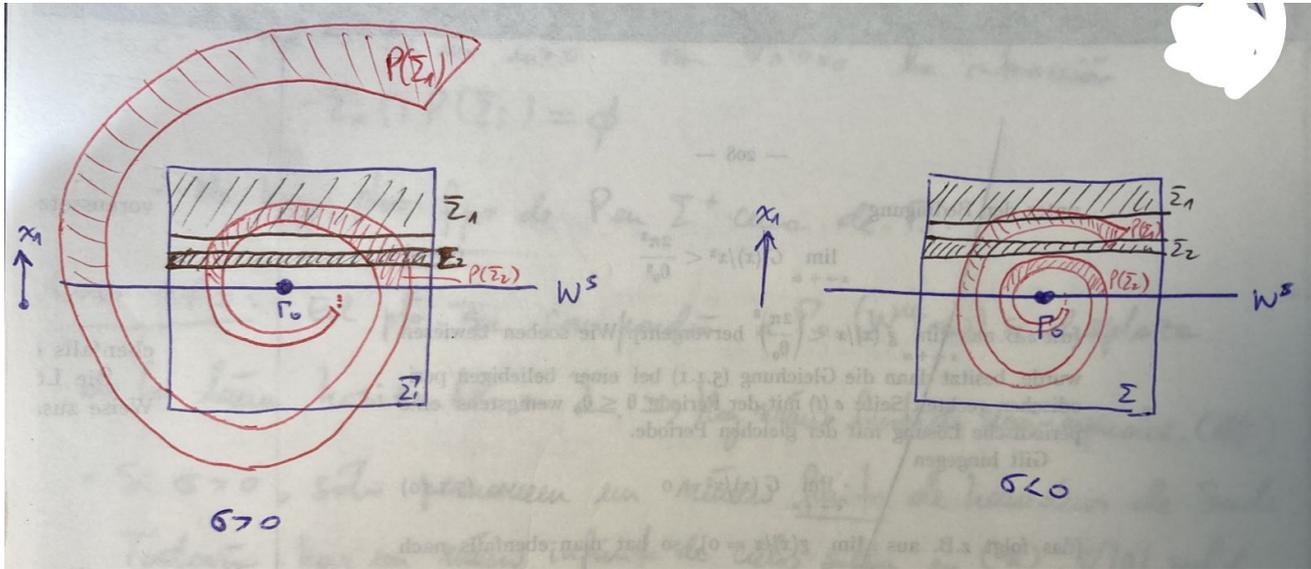


Figura 7.32: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso silla-foco.

infinito de segmentos superiores e inferiores, i.e., ubicados en el semiespacio $x_1 > 0$, o bien, $x_1 < 0$, respectivamente. Consideremos los segmentos semi-espirales superiores y sus preimágenes bajo P , y denotémoslos por $P(\Sigma_1), P(\Sigma_2), \dots$ y $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, respectivamente. Notemos que las preimágenes $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots$ son bandas horizontales en Σ^+ intercaladas con bandas que son las preimágenes de las semi-espirales inferiores. Todas estas bandas se acumulan en $W^s \cap \Sigma$.

Caso $\sigma > 0$. Debido a la expansión a lo largo del eje x_1 , las intersecciones $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ son no vacías a partir de cierto $i \geq i_0$, donde i_0 es algún natural ($i_0 = 2$ en la figura 7.32). Cada conjunto $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ consiste de dos componentes y forma una herradura de Smale. Luego, cada herradura implica un número infinito de puntos fijos de tipo silla para P . Estos puntos fijos corresponden a ciclos de tipo silla del sistema continuo (7.11) en una vecindad de $\Gamma_0 \cap x_0$.

Caso $\sigma < 0$. En este caso, debido a la contracción en el eje x_1 , existe un número natural i_0 tal que para todo $i \geq i_0$ la intersección $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ es vacía ($i_0 = 2$ en la figura 7.32). Por lo tanto, no hay puntos fijos de P en Σ^+ cerca de Γ_0 .

Por último, consideremos el caso $\beta \neq 0$. El punto que correspondería a la órbita homoclínica Γ_0 (i.e., $W^u(x_0)$) se desplaza de la línea horizontal en Σ . Luego, ahora solo hay un número finito de segmentos semi-espirales; ver figura 7.33 en el

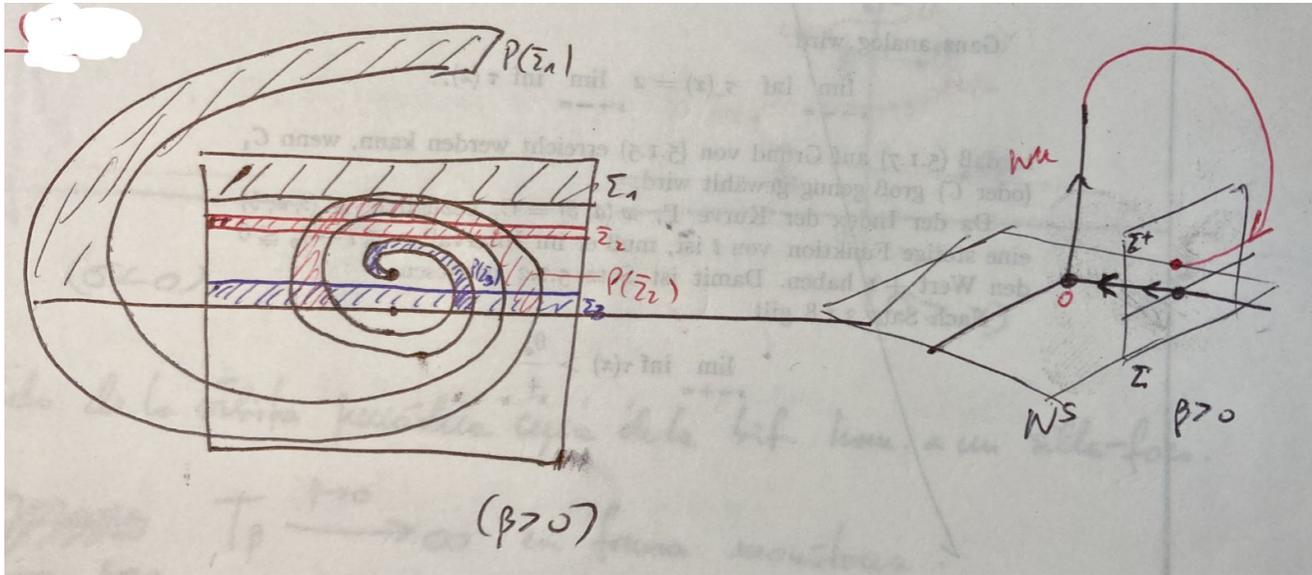


Figura 7.33: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso silla-foco cuando $\beta > 0$.

caso $\beta > 0$. Por tanto, si $\sigma > 0$ solo permanecen un número finito de herraduras de Smale. De todas maneras, esto implica que todavía existe un número infinito de ciclos de tipo silla en (7.11) para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño. Por el contrario, si $\sigma < 0$, el mapeo P actúa como contracción en Σ^+ para $\beta > 0$ y, por lo tanto, tiene un único punto fijo atractor que corresponde a un ciclo estable de (7.11). Por otro lado, no hay órbitas periódicas cerca de Γ_0 si $\beta < 0$. ■

COMENTARIOS.

1. Al igual que en el caso silla-foco con $\sigma < 0$, no es posible decir que los diagramas de bifurcación de todos los sistemas (7.11) que satisfagan (H1)-(H3) son topológicamente equivalentes. La razón es la misma: la invarianza topológica de ν_0 dado por (7.10).

De hecho, la estructura topológica completa del retrato de fase cerca de la órbita homoclínica no se conoce, aunque se puede decir bastante. Sea $\Omega(\nu)$ el conjunto de todas las secuencias bi-infinitas no equivalentes

$$\omega = \{ \dots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots \},$$

donde ω_i son enteros no negativos tales que

$$\omega_{i+1} < \nu\omega_i$$

para todo $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y para algún número real $\nu > 0$. Si $\nu \leq \nu_0$, entonces en $\beta = 0$ existe un subconjunto de órbitas de (7.11) ubicadas en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cap x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; este conjunto de órbitas está en correspondencia 1-1 con $\Omega(\nu)$. El número ω_i se puede interpretar como el número de “pequeñas” rotaciones hechas por la órbita cerca de x_0 después de la i -ésima vuelta “global”.

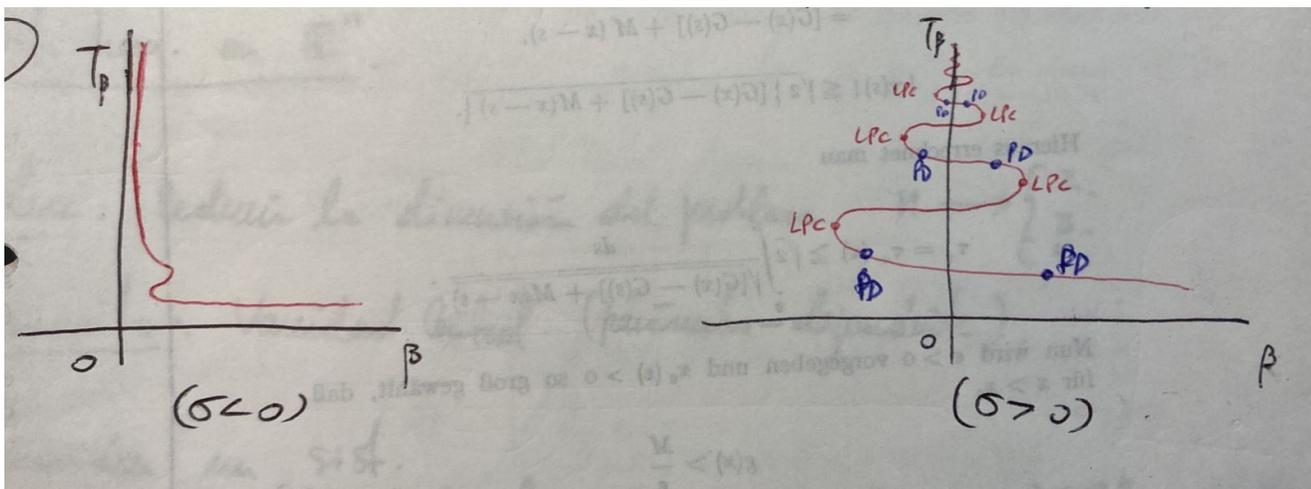


Figura 7.34: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso silla-foco cuando $\beta > 0$.

2. A medida que β se aproxima a cero tomando valores positivos o negativos, ocurre un número infinito de bifurcaciones. Algunas de estas bifurcaciones se relacionan con un ciclo límite “primario”, el cual realiza una vuelta global a lo largo de la órbita homoclínica. La figura 7.34 muestra el diagrama del período T_β de este ciclo con respecto a β . Si $\sigma < 0$, el período $T_\beta \rightarrow \infty$ en forma monótona a medida que $\beta \rightarrow 0^+$, pues el ciclo existe exclusivamente cuando $\beta > 0$. En cambio, si $\sigma > 0$, $T_\beta \rightarrow \infty$ en forma “serpenteante” (no monótona) a medida que $\beta \rightarrow 0$; notemos que β va tomando valores positivos y negativos en el proceso. La presencia de estos giros y contoneos significa que el ciclo desaparece y aparece via bifurcaciones fold infinitas veces (denotados

como LPC en la figura 7.34). Note que para cualquier $|\beta| \neq 0$ suficientemente pequeño existe solo un número finito de estos ciclos primarios —difieren en el número de rotaciones “pequeñas” cerca del silla-foco; mientras más alto el período, más rotaciones posee el ciclo.

Más aún, el ciclo también exhibe bifurcaciones period-doubling marcadas como PD en la figura 7.34). Cada uno de los ciclos “secundarios” de período doble también se bifurca a medida que $\beta \rightarrow 0$. Cada uno de estos ciclos (primarios y secundarios) son de tipo silla para $|\beta|$ suficientemente pequeño.

Por si eso fuera poco, existe otro tipo de bifurcaciones cerca de $\beta = 0$ asociadas a órbitas n -homoclínicas, las cuales se caracterizan por realizar $n - 1$ vueltos globales antes de cerrarse y formar la conexión en x_0 . Además, para cada una de estas órbitas n -homoclínicas secundarias el sistema exhibe dinámica de herraduras de Smale y caos al igual que en el escenario homoclínico original.

Por lo tanto, el cuadro completo del diagrama de bifurcación es extremadamente complejo!

3. En el caso estudiado aquí consideramos $n_- = \dim W^s = 2$, $n_+ = \dim W^u = 1$. Para el caso opuesto, basta invertir la dirección del tiempo y considerar las sustituciones $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$, $\sigma \rightarrow -\sigma$, estable \rightarrow repulsor.
4. Para estudiar bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, se puede construir una llamada **variedad central homoclínica** (parámetro-dependiente) cerca de una órbita homoclínica. Luego, el estudio de bifurcaciones homoclínicas en dimensiones altas se puede reducir apropiadamente al caso de sistemas en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^4 , etc.

Bibliografía

- [1] R. H. Abraham and C. D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Addison-Wesley, 1992.
- [2] V. S. Afraimovich, S. V. Gonchenko, L. M. Lerman, A. L. Shilnikov and D. V. Turaev, *Scientific heritage of L. P. Shilnikov*, Regular and Chaotic Dynamics 19, 435–460 (2014).
- [3] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier, *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [4] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer, 1983.
- [5] V. I. Arnol'd, V. S. Afrajmovich, Yu. S. Il'yashenko and L. P. Shil'nikov, *Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 5, Springer-Verlag, 1994.
- [6] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1990.
- [7] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical Systems. Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall, 1992.
- [8] A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific, 1998.
- [9] R. I. Bogdanov, *Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues*, Functional Anal. Appl., 9 (1975), 144–145.

- [10] R. I. Bogdanov, *Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues*, in Proceedings of Petrovskii Seminar, Vol. 2, Moscow State University, pp. 37–65. In Russian (English translation: Selecta Math. Soviet. 1(4), 1981, 389-421).
- [11] H. Broer and F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2010.
- [12] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 35, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.
- [13] S.-N. Chow, C. Li, and D Wang, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, 1994.
- [14] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Westview Press, 2003.
- [15] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor and H. Żaladek, *Bifurcations of Planar Vector Fields. Nilpotent Singularities and Abelian Integrals*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1480, Springer, 1991.
- [16] J. Guckenheimer, *Bifurcation and catastrophe*, in Dynamical Systems, Ed. M. Peixoto, Academic Press, N. Y., 1973, 95–110.
- [17] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1986.
- [18] J. Hale & H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1991.
- [19] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*, 2da edición, Oxford University Press, 2000.
- [20] A. J. Homburg & B. Sandstede. *Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields*, Handbook of Dynamical Systems 3 (2010), 379–524, Elsevier.
- [21] Yu. Ilyashenko and W. Li, *Nonlocal Bifurcations*, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 66, American Mathematical Society, 1999.
- [22] E. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting*, MIT Press, 2007.

- [23] Yu. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3ra edición, Springer, 2004.
- [24] J. E. Marsden and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Applied Mathematical Sciences 19, Springer, 1976.
- [25] J. Meiss, *Differential Dynamical Systems*, SIAM, Revised edition, 2017.
- [26] J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity & Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge University Press, 1995.
- [27] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.
- [28] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, 1999.
- [29] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev and L. O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part II)*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A Vol. 5, World Scientific Publishing, 2001.
- [30] J. Sotomayor, *Generic bifurcations of dynamical systems*, in *Dynamical Systems*, ed. M. Peixoto, Academic Press, N. Y., 1973, 561–582.
- [31] J. Sotomayor, *Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds*, *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.*, tome 43 (1974), 5–46.
- [32] J. Sotomayor, *Introducción al Estudio de las Bifurcaciones de los Sistemas Dinámicos*, Fondo Editorial, Acta Científica Venezolana, 1984.
- [33] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, 1982.
- [34] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, CRC Press, 2014.
- [35] F. Takens, *Singularities of vector fields*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 43 (1974), 47–100.