

UTFSM - Primer semestre 2017
Teoría de Bifurcaciones
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 4

1. Considere el mapeo

$$f : \begin{cases} \xi & \mapsto \lambda\xi + g_1(\xi, \eta), \\ \eta & \mapsto \mu\eta + g_2(\xi, \eta), \end{cases}$$

con $(\xi, \eta) \in U \subset \mathbb{R}^2$, donde $0 < |\lambda| < 1$, $|\mu| > 1$, y g_1, g_2 son $\mathcal{O}(2)$ en ξ y η .

- (a) ¿Cuáles son las variedades estable e inestable, respectivamente, del mapeo linealizado?
- (b) Argumente por qué las variedades estable e inestable local del origen se pueden representar como los gráficos de funciones C^r , es decir, $W_{loc}^s(0) = \text{gr}(h^s(\xi))$, $W_{loc}^u(0) = \text{gr}(h^u(\eta))$, donde $h^s(0) = h^u(0) = Dh^s(0) = Dh^u(0) = 0$.
- (c) Sea la transformación de coordenadas

$$(x, y) = (\xi - h^u(\eta), \eta - h^s(\xi)).$$

Muestre que el mapeo f toma localmente la forma

$$\begin{cases} x & \mapsto \lambda x + f_1(x, y), \\ y & \mapsto \mu y + f_2(x, y), \end{cases}$$

con $f_1(0, y) = 0$, $f_2(x, 0) = 0$. ¿Cuáles son las formas específicas de f_1 y f_2 en términos de g_1 y g_2 ?

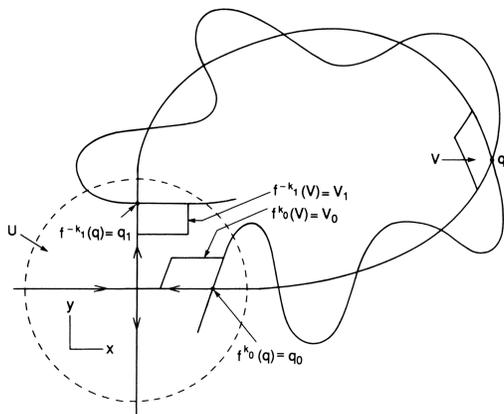


Figure 1:

- (d) Suponga que el mapeo f posee un punto homoclínico q . Considere la región V en la Figura 1, con un lado a lo largo de $W^s(0)$ emanando desde q , un lado a lo largo de $W^u(0)$ emanando desde q , y los restantes dos lados paralelos a los vectores tangentes de $W^s(0)$ y $W^u(0)$ en q . Muestre que V se puede escoger tan pequeño tal que $f^{-k_1}(V) = V_1 \subset U$ y $f^{k_0}(V) = V_0 \subset U$ como en la figura. En particular, muestre que para algunos enteros positivos $k_0, k_1 > 0$, ambos conjuntos $f^{k_0}(V)$ y $f^{-k_1}(V)$ están en el primer cuadrante con sus lados coincidiendo con las partes de $W^s(0)$ y $W^u(0)$ como en la figura.
- (e) Pruebe que si $W^s(0)$ y $W^u(0)$ se intersectan transversalmente en q , entonces también deben interseptarse transversalmente en $f^k(q)$ para cualquier entero k .
2. Suponga que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un C^r -difeomorfismo, $r \geq 1$, y posee un punto fijo hiperbólico en p_0 cuyas variedades estable e inestable se intersectan transversalmente como se muestra en la figura 2(a). Estamos interesados en la dinámica cerca de p_0 . Suponga que en coordenadas locales (x, y) cerca de p_0 la linealización de f tiene la forma

$$Df(p_0) : \begin{cases} x \mapsto \lambda x, \\ y \mapsto \mu y, \end{cases}$$

con $\lambda < 1$, $\mu > 1$, tal que las órbitas cerca de p_0 aparecen como en la figura 2(b). Sin embargo, sabemos que las variedades estable e inestable cerca de p_0 oscilan infinitamente como se muestra en la figura 2(a). ¿Son contradictorias las figuras 2(a) y 2(b)? Si no lo son, muestre cómo las órbitas en la figura 2(b) se manifiestan en la figura 2(a).

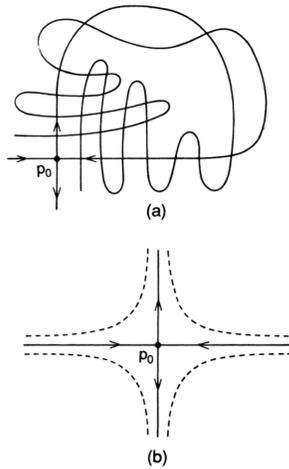


Figure 2:

3. Considere un C^r -difeomorfismo, $r \geq 1$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con puntos fijos hiperbólicos en p_0 y p_1 , respectivamente. Suponga que $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_1)$; entonces q se dice un punto *heteroclínico*, y si $W^s(p_0)$ intersecta $W^u(p_1)$ transversalmente en q , entonces q se dice un *punto heteroclínico transversal*; ver figura 3(a).

- (a) ¿La existencia de un punto heteroclínico implica la existencia de herraduras de Smale?
- (b) Adicionalmente, suponga que $W^u(p_0)$ interseca $W^s(p_1)$ transversalmente y se forma un *ciclo heteroclínico* como se muestra en la figura 3(b). Explique detalladamente cómo (y por qué) en este caso uno puede hallar herraduras de Smale.
- (c) Suponga que una rama de $W^u(p_0)$ coincide con una rama de $W^s(p_1)$, pero $W^s(p_0)$ sigue intersectando a $W^u(p_1)$ transversalmente en q como en la figura 3(c). ¿Es posible hallar herraduras de Smale?

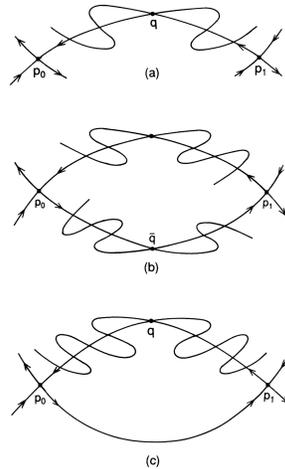


Figure 3:

4. (**Lenguas de Arnold en el mapeo logístico con retardo perturbado**) Considere la ecuación en recurrencia $x_{k+1} = rx_k(1 - x_{k-1}) + \epsilon$, la cual puede ser reescrita en forma equivalente como el sistema discreto bidimensional

$$f : \begin{cases} x \mapsto rx(1 - y) + \epsilon, \\ y \mapsto x, \end{cases}$$

donde $r > 0$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$ son parámetros.

- (a) Verifique que existe un punto fijo no-trivial en las coordenadas

$$x^* = y^* = \frac{-1 + r + \sqrt{A}}{2r},$$

donde $A = r^2 + r(4\epsilon - 2) + 1$.

- (b) Verifique para $\epsilon = 0$, los valores propios asociados al punto fijo (x^*, y^*) son $\lambda_{1,2}(r, 0) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5 - 4r})$. Concluya que el sistema pasa por una bifurcación Neimark-Sacker para $(r, \epsilon) = (2, 0)$ en el punto (x^*, y^*) .

- (c) Escriba los valores propios $\lambda_{1,2}(2, 0)$ en su forma polar $e^{i2\pi k}$, para un cierto $k \in \mathbb{R}$ apropiado. ¿Es este k un número racional o irracional?
- (d) Para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeño, verifique que los valores propios del punto fijo (x^*, y^*) son

$$\lambda_{1,2}(r, \epsilon) = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{A} + r \pm \sqrt{A + (r - 3)^2 - 2\sqrt{A}(5 + r)} \right).$$

- (e) Pruebe que la relación $r = \frac{2}{1+\epsilon}$ define una curva de bifurcación Neimark-Sacker en el plano (r, ϵ) . Haga un bosquejo de esta curva cerca del punto $(r, \epsilon) = (2, 0)$.
- (f) Suponga que esta bifurcación Neimark-Sacker es supercrítica (se puede probar, pero no es necesario hacerlo). Sin calcularlas directamente, argumente e identifique posibles regiones (y sus fronteras) en el plano (r, ϵ) cerca de $(2, 0)$ en que hay dinámica periódica, cuasiperiódica, ninguna de las anteriores, etc.

5. Considere la siguiente aplicación suave a dos parámetros $P_{\alpha, \epsilon} : S^1 \rightarrow S^1$,

$$P_{\alpha, \epsilon}(\varphi) = \varphi + \alpha + \epsilon \sin \theta,$$

donde $0 \leq \epsilon < 1$, $\varphi, \alpha \pmod{2\pi}$. Calcule expresiones asintóticas para las curvas que acotan una región en el plano (α, ϵ) correspondientes al mapeo teniendo número de rotación $\rho = \frac{1}{2}$.

Ayuda: Un número de rotación $\rho = \frac{1}{2}$ implica la presencia de puntos de período dos, y las fronteras están definidas por las bifurcaciones fold de estos ciclos.