UTFSM - Primer semestre 2017
Teoría de Bifurcaciones
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 3

1. Considere una familia de sistemas dinámicos continuos en $\mathbb{R}^n$, dependiendo de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, que posee una órbita periódica γ_μ para cada μ. Sea

$$P_\mu : \Sigma \to \Sigma$$

la aplicación de retorno de Poincaré asociada a γ_μ, definida en una sección transversal $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, para $|\mu|$ suficientemente pequeño. Suponga que en $\mu = 0$ el punto fijo de P_0 tiene los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $|\lambda_j| < 1$, con $-1 < \mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ para todo $j = 2, \ldots, n-1$; y por lo tanto, el punto fijo de P_0 es no-hiperbólico. Suponga que la restricción de P_μ a una variedad central W^c_{loc} 1-dimensional tiene la forma

$$P^c_\mu : x \mapsto -(1+\mu)x - x^3, \quad x \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \mu \approx 0.$$

   (a) Investigue las bifurcaciones de P^c_μ para μ suficientemente cerca de $\mu = 0$ y dibuje el diagrama de bifurcación de P^c_μ en el espacio (μ, x).

   (b) Escriba en forma explícita un sistema discreto $(n-1)$-dimensional que sea conjugado a la aplicación de retorno de Poincaré P_μ.

   (c) En el caso $n = 3$, dibuje los posibles retratos de fase del **sistema continuo** para $\mu < 0$, $\mu = 0$, y $\mu > 0$. Identifique la estabilidad (atractor, repulsor, silla) de los ciclos presentes en cada caso.

2. Sea L una órbita periódica del campo de vectores $\boxed{\dot{x} = f(x, \alpha),}$ con $x \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y f suficientemente suave. Considere una aplicación de Poincaré P_α y el punto fijo p_α asociados a L. Suponga que para $\alpha = 0$, p_0 posee multiplicadores $\mu_1(0) = -1$ y $\mu_2(0) < -1$.

   (a) Haga bosquejos de **todos** los diagramas de bifurcación y **todos** los posibles retratos de fase no-equivalentes **del campo vectorial** f para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Justifique su respuesta.

   (b) Determine las dimensiones de las variedades estable e inestable de **todas** las órbitas periódicas hiperbólicas de f presentes en cada caso en (a). Justifique su respuesta.

3. Considere una órbita periódica estable de un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ que pasa por una cascada de duplicaciones de período al caos.

   (a) Haga un bosquejo de la dinámica en el espacio de fase tridimensional **antes y después** de la primera duplicación de período.

   (b) Explique el concepto de un mapeo de Poincaré en una sección transversal bidimensional apropiada.

(c) Bosqueje la dinámica del mapeo de Poincaré **antes y después** de la primera duplicación de período. ¿En qué consiste el conjunto atractor del mapeo de Poincaré en cada caso? Describa brevemente el bosquejo.

(d) Bosqueje la secuencia de atractores del mapeo de Poincaré a lo largo de toda la ruta al caos. Describa brevemente el bosquejo.

(e) Explique en términos de "estirar y doblar", por qué la dinámica del sistema es caótica después de la secuencia de duplicación de período.

4. Haga un bosquejo del diagrama de bifurcación y retratos de fase representativos en el caso en que la aplicación de retorno de Poincaré P_α asociada a un ciclo L en $\mathbb{R}^3$ pasa por una bifurcación Neimark-Sacker subcrítica en $\alpha = 0$.

5. Considere un sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, con una órbita heteroclínica γ conectando dos puntos de equilibrio de tipo silla hiperbólicos x_1 y x_2 cuando $\mu = \mu^*$.

   (a) Si $n = 2$, demuestre que γ es estructuralmente inestable. *Sugerencia*: Estudie la transversalidad de la intersección de las variedades invariantes involucradas.

   (b) Si $n \geq 3$, ¿Qué se puede decir sobre la estabilidad estructural de γ? ¿Qué condiciones de genericidad se debiesen imponer sobre γ para que la conexión fuese de codimensión uno?

6. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^2 + \mu y. \end{cases}$$

   (a) Demuestre que para $\mu = 0$, el sistema posee una órbita homoclínica. Ayuda: Considere los niveles de la función $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

   (b) Determine los retratos de fase para $|\mu|$ suficientemente pequeño.

   (c) ¿Es una bifurcación homoclínica genérica? Argumente a favor o en contra.

   (d) Si se añade un término axy a la segunda ecuación, con $a \neq 0$, pruebe que la órbita homoclínica ya no existe para $\mu = 0$. Más aún, si $a > 0$, pruebe que la bifurcación homoclínica ocurre para algún $\mu < 0$. ¿Es ésta una bifurcación homoclínica genérica?

7. **(El propósito de este problema es probar una versión equivalente del teorema de Andronov-Leontovich para órbitas homoclínicas planares usando solamente una sección transversal para construir la aplicación de retorno de Poincaré.)** Considere un sistema planar $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

   (a) Cuando $\mu = \mu_0$, existe un punto silla hiperbólico p_0 y una órbita homoclínica $\Gamma_0 \subset W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$. Sea $q \neq p_0$ un punto en Γ_0.

   (b) Sea M una sección unidimensional transversal a Γ_0 en q. Sea $I = [\mu_0 - \epsilon, \mu_0 + \epsilon]$ un intervalo en el espacio de parámetros. A medida que μ varía, sea $p_\mu = p(\mu)$ la curva de puntos silla con $p(\mu_0) = p_0$, y sean $u(\mu), s(\mu)$ curvas suaves en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ contenidas en $(M \times I) \cap W^u(p_\mu)$ y $(M \times I) \cap W^s(p_\mu)$, respectivamente. Asuma que $\frac{d}{d\mu}(u(\mu) - s(\mu)) \neq 0$ en $\mu = \mu_0$.

   Entonces, si para $\mu = \mu_0$, $\mathrm{tr} Df(p_0) < 0$ (resp. > 0), demuestre que:

i Existe una familia Γ_μ de órbitas periódicas estables (resp. inestables) en el espacio (x,μ) para los sistemas $\dot{x} = f(x,\mu)$, cuya clausura contiene a $\Gamma_0 \times \{\mu_0\}$.

ii Los períodos de estas órbitas periódicas son no-acotados para $\mu \to \mu_0$.

iii Existe un ϵ cercano a 0 (podría ser negativo) tal que si μ está en el intervalo entre μ_0 y $\mu_0 + \epsilon$, entonces $\dot{x} = f(x,\mu)$ posee exactamente una órbita periódica en la familia Γ_μ.

8. Considere un sistema planar $\dot{x} = f(x,\mu)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, que posee un ciclo heteroclínico formado por la unión de n órbitas heteroclínicas y n puntos silla conectados por las heteroclínicas. Generalice el resultado del problema anterior y pruebe que la estabilidad de las órbitas periódicas que ocurren queda determinada por la cantidad $\log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)$, donde $-\lambda_i < 0 < \mu_i$ son los valores propios del i-ésimo punto silla en el loop.

9. Encuentre una forma asintótica del período $T(\beta)$ del ciclo bifurcado desde una homoclínica en el plano. *Ayuda:* Use el hecho de que un punto en el ciclo pasa más tiempo cerca del punto silla.

10. Demuestre que el valor propio no-trivial (i.e., $\neq 1$) del ciclo que se bifurca de una órbita homoclínica en un sistema planar se aproxima a cero cuando $\beta \to 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

11. Demuestre que para $1+\gamma < \beta - 1$, el siguiente sistema posee un ciclo heteroclínico que contiene tres puntos silla:
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& x\left(-x^2 + \beta\left(\frac{1+\gamma}{1-\beta}\right)y^2\right), \\ \dot{y} &=& y\left(\left(\frac{1+\gamma}{1-\beta}\right) + \gamma x^2 + \left(\frac{1+\gamma}{1-\beta}\right)y^2\right). \end{array}\right.$$
¿Es posible determinar si este loop es estable o inestable? Ayuda: Primero demuestre que el círculo $x^2 + y^2 = 1$ es invariante.

12. **(Modelo de Sandstede)** Considere el siguiente sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -x + 2y + x^2, \\ \dot{y} &=& (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy, \end{array}\right.$$
donde α es un parámetro.

    (a) Verifique que para $\alpha = 0$ existe una órbita homoclínica Γ_0 al origen. *Ayuda:* Considere la *hoja Cartesiana* $H(x,y) \equiv x^2(1-x) - y^2 = 0$.

    (b) Pruebe que se satisfacen las condiciones de genericidad y transversalidad y, por tanto, la bifurcación homoclínica es de codimensión uno. *Sugerencia:* Pruebe que la integral de Melnikov es no-nula para Γ_0. Para esto, encuentre dos funciones $t_\pm = t_\pm(x)$ integrando la primera ecuación del sistema a lo largo de las mitades superior (+) e inferior (−) de Γ_0. Luego, transforme la integral de Melnikov en la suma de dos integrales sobre $x \in [0,1]$.

13. **(Propiedad de inclinación fuerte)** Considere un sistema lineal
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &=& \lambda_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &=& \lambda_3 x_3, \end{array}\right.$$

donde $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$, dentro del cubo unitario $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$. Sea φ^t el flujo asociado.

(a) Tome una línea l_0 contenida en el plano $x_1 = 1$ pasando por el eje x_1 y muestre que su imagen inversa bajo el flujo (i.e., $l(t) = \varphi^t l$ con $t < 0$) es también una línea en algún plano $x_1 =$ const. pasando por el mismo eje.

(b) Muestre que el límite

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi^t l$$

es el mismo para todas las líneas iniciales excepto para la línea $l_0 = \{x_1 = 1\} \cap \{x_3 = 0\}$. ¿Cuál es el límite?

(c) Asuma que el sistema fuera del cubo Ω posee una órbita homoclínica al origen. Usando la parte (b) muestre que genéricamente la (clausura de la) variedad estable $W^s(0)$ se intersecta a sí misma a lo largo del espacio propio no-principal $x_1 = x_2 = 0$. Reformule la condición de genericidad como la condición de intersección transversal de $W^s(0)$ con alguna otra variedad invariante cerca del punto silla.

(d) Bosqueje la forma de la variedad estable en el caso degenerado.

14. Supongamos que invertimos la dirección del tiempo $t \mapsto -t$ en los teoremas de Shilnikov para bifurcaciones homoclínicas en $\mathbb{R}^3$. Suponga que las condiciones de genericidad y transversalidad de cada teorema se siguen satisfaciendo. Describa la dinámica en una vecindad de la órbita homoclínica antes, durante, y después de cada bifurcación.