UTFSM - Primer semestre 2016
Teoría de Bifurcaciones
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 2

1. Sea $f(x,\mu)$, $x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$, una familia de difeomorfismos suaves, a un parámetro, para los cuales existe un punto fijo en $x=0$ para todo μ, es decir, $f(0,\mu) \equiv 0$. Suponga que el valor propio de la linealización de f en $x=0$, $\lambda(\mu)$ es tal que $\lambda(0)=1$ y $\lambda'(0) = \frac{d\lambda}{d\mu}|_{\mu=0} > 0$. Además, suponga que $f_{xx}(0,0) > 0$.

   (a) Escriba una expansión de f en torno a $x=0$ de la forma $f(x,\mu) = \sum_{j=0} a_j(\mu)x^j$. Pruebe que $a_0(\mu) \equiv 0$, $a_1(\mu) = 1 + \mu f_{\mu x}(0,0) + O(\mu^2)$, y $a_2(0) > 0$.

   (b) Use el Teorema de la Función Implícita para demostrar que la ecuación de la variedad de puntos fijos en el espacio (μ, x), dada por
   $$f(x,\mu) - x = 0,$$
   posee solución no-trivial $x = x^*(\mu)$ para $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, y obtenga que
   $$\frac{dx^*}{d\mu}(0) = \frac{-2f_{\mu x}(0,0)}{f_{xx}(0,0)} < 0.$$

   (c) Determine la estabilidad del punto fijo en $x=0$ para todo $|\mu|$ suficientemente pequeño.

   (d) Determine la estabilidad del punto fijo en $x = x^*(\mu)$ para todo $|\mu|$ suficientemente pequeño.

   (e) Haga un bosquejo del diagrama de bifurcación en el plano (μ, x).

2. Demuestre que el coeficiente c de la forma normal para la bifurcación flip se puede calcular en términos de la segunda iteración del mapeo, esto es:
   $$c(0) = -\frac{1}{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3} f^2(x)\Big|_{(x,\alpha)=(0,0)}.$$
   Ayuda: Tome en cuenta que $f_x(0,0) = -1$.

3. Considere el mapeo logístico
   $$f(x,\alpha) = \alpha x(1-x),$$
   que depende de un único parámetro $\alpha > 0$.

   (a) Demuestre que en $\alpha_1 = 3$ el mapeo exhibe la bifurcación flip, es decir, un punto fijo de f se vuelve inestable, mientras que un ciclo estable de período 2 se bifurca desde este punto para $\alpha > \alpha_1$. *Ayuda*: Use la fórmula de la pregunta anterior.

   (b) Pruebe que en $\alpha_0 = 1 + \sqrt{8}$ se generan un ciclo estable y otro inestable de período 3 los cuales existen para $\alpha > \alpha_0$.

4. Sea $f(\mu, x)$ una familia de difeomorfismos suaves en $x \in \mathbb{R}$ y en el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, satisfaciendo

   - $f(\mu, -x) = -f(\mu, x)$;
   - $f_x(\mu, 0) = \lambda(\mu)$, $\lambda(0) = 1$, y $\lambda'(0) = \frac{d\lambda}{d\mu}|_{\mu=0} > 0$;
   - $f_{xxx}(0, 0) < 0$.

   (a) Demuestre que, para (μ, x) suficientemente cerca de $(0, 0)$ se cumple:

   $$f(\mu, x) = \lambda(\mu)x + a_3(\mu)x^3 + O(x^5),$$

   donde $a_3(0) < 0$.

   (b) Deduzca que, en alguna vecindad de $(\mu, x) = (0, 0)$:

      i. f tiene un punto fijo estable en el origen para $\mu < 0$,

      ii. para $\mu > 0$, f tiene un punto fijo inestable en el origen y dos puntos fijos estables en

      $$x^*_\pm(\mu) = \pm \left(\frac{6\mu\, \lambda'(0)}{|f_{xxx}(0, 0)|} \right)^{1/2} (1 + O(\mu)).$$

      iii. Bosqueje el diagrama de bifurcación para f en el plano (μ, x).

5. Considere el sistema

   $$\begin{cases} \dot{x} &= xy + ax^3 + bxy^2, \\ \dot{y} &= -y + cx^2 + dx^2y. \end{cases}$$

   (a) Encuentre una variedad central del origen en $\mathbb{R}^2$ con términos hasta tercer orden.

   (b) Determine la estabilidad del origen cuando $a + c < 0$ y $a + c > 0$. Dibuje bosquejos de los respectivos retratos de fase.

6. Considere el sistema

   $$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - x^3, \\ \dot{y} &= y + x^4. \end{cases}$$

   Demuestre que el sistema tiene una familia de variedades centrales W^c_μ del origen dadas localmente por la gráfica de $y = V(x, \mu)$, donde V es una función C^6 en x si $\mu < \frac{1}{6}$, pero solo es C^4 en x para $\mu < \frac{1}{4}$. Ayuda: Considere una expansión de la forma $V(x, \mu) = \sum_{j=0} a_j(\mu)x^j$, obtenga los coeficientes $a_j(\mu)$, y analice sus denominadores.

7. Considere el sistema

   $$\begin{cases} \dot{x} &= y - x^3, \\ \dot{y} &= \mu y - x^3, \end{cases}$$

   donde $\mu \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentre una familia de variedades centrales W^c_μ del origen para $|\mu|$ suficientemente pequeño. Ayuda: Obtenga una representación de W^c_μ como en el problema anterior.

   (b) Determine la estabilidad del origen para cada $|\mu|$ suficientemente pequeño.

8. Considere el mapeo de Hénon

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}$$

Pruebe que las bifurcaciones fold y flip de sus puntos fijos son no-degeneradas para $\beta \neq \pm 1$.

9. Sea $A(\alpha)$ una matriz real parámetro-dependiente de tamaño $n \times n$ la cual posee un par (simple) de valores propios complejos $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) > 0$. Pruebe que

$$\mu'(0) = \mathrm{Re}\langle p, A'(0)q\rangle,$$

donde $p, q \in \mathbb{C}^n$ satisfacen

$$A(0)q = i\omega(0)q, \quad A^T(0)p = -i\omega(0)p, \quad \langle p, q\rangle = 1.$$

10. Considere una familia de sistemas dinámicos continuos en $\mathbb{R}^n$, dependiendo de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, que posee una órbita periódica γ_μ para cada μ. Sea $P_\mu : \Sigma \to \Sigma$ la aplicación de retorno de Poincaré asociada a γ_μ, definida en una sección transversal $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, para $|\mu|$ suficientemente pequeño. Suponga que en $\mu = 0$ el punto fijo de P_μ tiene los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $0 < \mathrm{Re}(\lambda_j) < 1$ para todo $j = 2, \ldots, n-1$, y por lo tanto, γ_0 es un ciclo no-hiperbólico. Suponga que la restricción de P_μ a una variedad central W^c_{loc} 1-dimensional tiene la forma

$$P^c_\mu : x \mapsto (1+\mu)x - x^2, \quad x \in (-\epsilon, \epsilon).$$

   (a) Investigue las bifurcaciones de P^c_μ para μ suficientemente cerca de $\mu = 0$.
   (b) Dibuje el diagrama de bifurcación de P^c_μ en el espacio (μ, x).
   (c) Escriba en forma explícita un sistema discreto $(n-1)$-dimensional que sea conjugado a la aplicación de retorno de Poincaré P_μ.
   (d) En el caso $n = 3$, dibuje los posibles retratos de fase en $\mathbb{R}^3$ para $\mu < 0$, $\mu = 0$, y $\mu > 0$.