UTFSM - Primer semestre 2016
Teoría de Bifurcaciones
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 1

1. Demuestre que el campo de vectores

$$X : \begin{cases} \dot{x} &= -1 + x(1-x^2) + e^{-x} + xy + y^2, \\ \dot{y} &= y + x^2 + 3xy - y^2, \end{cases}$$

es equivalente cerca de $(x, y) = (0, 0)$ a un sistema de Forma Normal:

$$X_{FN} : \begin{cases} \dot{u} &= \alpha\, u^2 + \mathcal{O}\big(||(u,v)||^3\big), \\ \dot{v} &= v + \beta\, u\, v + \mathcal{O}\big(||(u,v)||^3\big). \end{cases}$$

2. Considere el punto de equilibrio $(x^*, y^*) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ del sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} &= -\dfrac{1}{2}\, x + y, \\ \dot{y} &= -y + \dfrac{x^2}{1+x^2}, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que existe un cambio de coordenadas que transforma el campo X, **en una vecindad de** (x^*, y^*), en la siguiente **forma normal**:

$$X_{FN} : \begin{cases} \dot{u} &= a\, u^2 + T.O.S., \\ \dot{v} &= -v + u\, v + T.O.S., \end{cases}$$

donde $a = \{-1, 1\}$ es un coeficiente por determinar.

3. Considere el campo de vectores

$$X : \begin{cases} \dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{02}y^2 + \mathcal{O}\big(||(x,y)||^3\big), \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{02}y^2 + \mathcal{O}\big(||(x,y)||^3\big), \end{cases}$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$. Demuestre que el sistema no posee términos resonantes de grado 2 y encuentre la Forma Normal asociada.

4. Considere la siguiente ecuación diferencial que modela una única población sometida a una cosecha (captura o remoción) constante por parte de un agente externo (ej, humanos):

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha,$$

donde x es el tamaño de la población; r y K son la tasa de crecimiento intrínsecto y la capacidad de soporte del ambiente, respectivamente, y α es la tasa de cosecha, el cual es un parámetro de control. Encuentre un valor de parámetro α_0 en el cual el sistema tiene una bifurcación fold, y chequee las condiciones de genericidad y transversalidad.

5. Considere la forma normal topológica

$$\dot{x} = \alpha x \pm x^2,$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Estudie la bifurcación que ocurre para $\alpha = 0$. ¿Cuál es el diagrama de bifurcación en el plano (α, x)?

   (b) Demuestre que si se añade un término constante ϵ a la forma normal entonces no ocurre ninguna bifurcación, o bien, ocurren dos bifurcaciones fold en los valores $\alpha = \pm 2\sqrt{|\epsilon|}$. *Hint:* Encuentre y esboce los diagramas de bifurcación posibles.

6. Considere la forma normal topológica

$$\dot{x} = \alpha x \pm x^3,$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Estudie la bifurcación que ocurre para $\alpha = 0$. ¿Cuál es el diagrama de bifurcación en el plano (α, x)?

   (b) Demuestre que si se añade un término pequeño ϵx^2 a la forma normal entonces el diagrama de bifurcación de la parte (a) "se rompe" en los siguientes elementos: una variedad de equilibrios con una bifurcación fold y una variedad de equilibrios que no sufre bifurcaciones.

7. Sea el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Suponga que f es una función suave en (x, α) y que satisface las siguientes condiciones: (i) $f(0,0) = 0$, (ii) $f_x(0,0) = 0$, (iii) $f_\mu(0,0) = 0$, (iv) $f_{x\mu}(0,0) \neq 0$, (v) $f_{xx}(0,0) \neq 0$. Demuestre que el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca de $(x, \mu) = (0,0)$ a un sistema de la forma $\dot{y} = \alpha y \pm y^2 + O(y^3)$ cerca de $(y, \alpha) = (0,0)$.

8. Examine cómo las hipótesis del teorema de la bifurcación de Hopf fallan para los siguientes sistemas:

   (a) $\dot{r} = r(\mu^2 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$;

   (b) $\dot{r} = \mu r(r - \mu)(r - 2\mu)$, $\dot{\theta} = 1$;

   (c) $\dot{r} = \mu r(r - \mu)(r - 2\mu) - r^3$, $\theta = 1$;

   (d) $\dot{r} = \mu r$, $\dot{\theta} = 1$.

9. Demuestre que la familia uniparamétrica de ecuaciones diferenciales

$$X : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (1+\mu)x - y + x^2 - xy, \\ \dot{y} & = & 2x - y + x^2, \end{array} \right.$$

pasa por una bifurcación de Hopf supercrítica en $\mu = 0$.