

Bifurcaciones homoclínicas

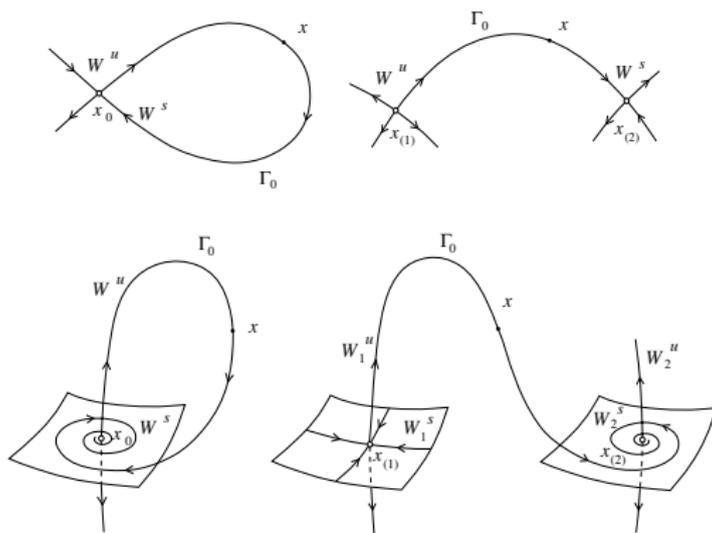
Pablo Aguirre

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile



UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

Bifurcaciones globales



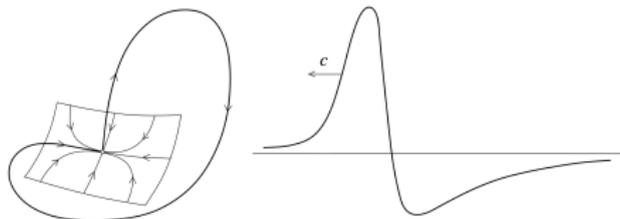
$\dot{x} = f(x, \beta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, f suficientemente suave.

En lo que sigue, asumimos que todos los puntos de equilibrio en nuestro análisis son hiperbólicos.

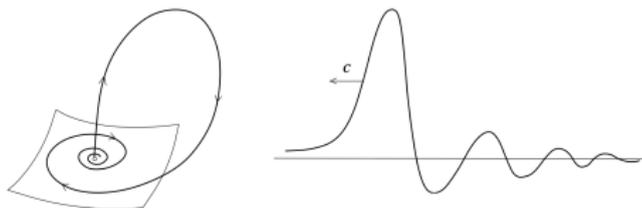
- ▶ **Bifurcaciones homoclínicas:** Una órbita Γ_0 se dice *homoclínica* si converge al mismo punto de equilibrio x_0 para $t \rightarrow \pm\infty$. Esto implica que $\Gamma_0 \subset W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$.
- ▶ **Bifurcaciones heteroclínicas:** Una órbita Γ_0 se dice *heteroclínica* si converge a un punto x_1 para $t \rightarrow -\infty$, y converge a un punto x_2 para $t \rightarrow +\infty$, con $x_1 \neq x_2$. Esto implica que $\Gamma_0 \subset W^u(x_1) \cap W^s(x_2)$.

Sabemos que estas intersecciones no-transversales de variedades estables e inestables son estructuralmente inestables. Luego, cualquier perturbación del parámetro β romperá estas conexiones globales.

Bifurcaciones homoclínicas en aplicaciones

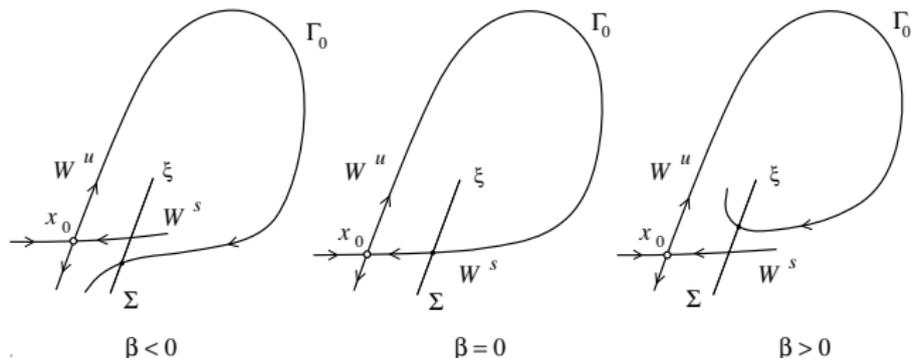


(a)



- Modelos de dinámica de láseres,
 - Propagación de impulsos nerviosos en neuronas y axones,
 - Ondas viajeras en EDPs: ej, modelo de FitzHugh-Nagumo con distintas escalas de tiempo (slow-fast dynamics),
 - Modelos de sistemas de comunicación basados en caos,
 - Reacciones electro químicas y procesos de oxidación;
 - Convección electrodinámica en cristales líquidos,
 - Cadenas alimenticias en dinámica de poblaciones,
 - Convección no-lineal en campos magnéticos,
 - Sistemas excitables: Reacción mediante un pulso antes de regresar al estado de reposo.
- etc.

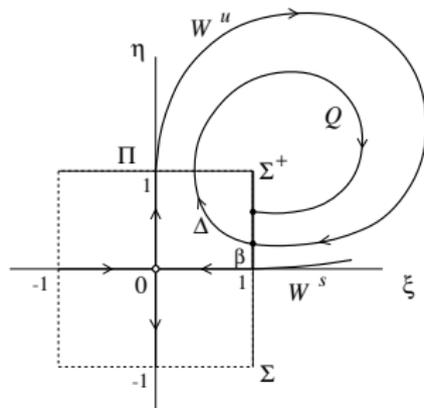
Bifurcaciones homoclínicas planares



$\dot{x} = f(x, \beta)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, f suficientemente suave.

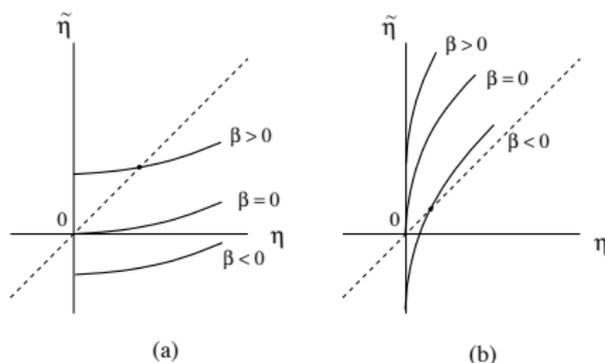
- ▶ Supongamos que para $\beta = 0$, Γ_0 es una intersección no-transversal de $W^u(x_0)$ y $W^s(x_0)$.
- ▶ Al variar el parámetro β y romper el loop homoclínico, se provoca un reacomodo de las variedades invariantes.
- ▶ ¿Qué consecuencias tiene la formación/destrucción de la órbita homoclínica?
- ▶ Consideremos una sección unidimensional Σ transversal a $W^s(x_0)$ cerca de x_0 .
- ▶ Introduzcamos coordenadas locales ξ a lo largo de Σ tales que el punto de intersección de Σ con la variedad estable corresponde a $\xi = 0$.
- ▶ Esta construcción se puede realizar para todos los sistemas suficientemente cercanos al caso $\beta = 0$. Sin embargo, para $\beta \neq 0$, la variedad inestable $W^u(x_0)$ no regresa al punto silla. Hay dos posibilidades: Las variedades se separan hacia arriba o hacia abajo.
- ▶ Denotemos por ξ^u al valor de la coordenada ξ en la intersección de $W^u(x_0)$ con Σ . En particular, si $\beta = 0$, $\xi^u = 0$.

Aplicación de retorno P



- ▶ A continuación introducimos dos secciones transversales cerca del origen: Σ and Π , las cuales son transversales a las variedades estable e inestable del origen, respectivamente.
- ▶ Luego, es posible definir una aplicación de retorno de Poincaré P en una semi-sección Σ^+ ,
 $P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$, como una composición $P = Q \circ \Delta$ de
 - (a) un mapeo (local) cerca-de-la-silla $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$,
 - (b) y un mapeo (global) $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ cerca de la parte global de la órbita homoclínica.
- ▶ Notemos que β es la distancia entre las variedades a lo largo de Σ .
- ▶ Express Δ and Q in terms of eigenvalues and unfolding parameters.

Puntos fijos del mapeo de Poincaré

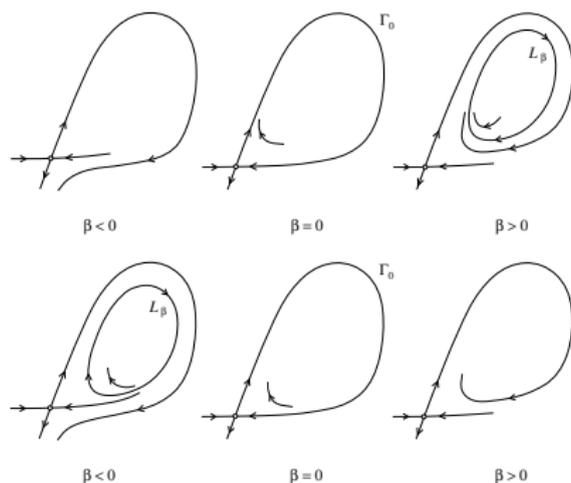


- ▶ Al sustituir en la composición $P = Q \circ \Delta$, obtenemos:

$$P : \eta \mapsto \beta + a \eta - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \eta^2 + \dots, \text{ donde } \beta \approx 0.$$

- ▶ Es posible analizar los puntos fijos de P para $|\eta|$ y $|\beta|$ pequeños.
- ▶ (a) Existe un punto fijo positivo para $\beta > 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$.
- ▶ (b) Existe un punto fijo positivo para $\beta < 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$.
- ▶ Al estudiar además la estabilidad de estos puntos fijos obtenemos el siguiente teorema...

Teorema [Andronov-Leontovich]: Bifurcación homoclínica planar



$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponga que se cumplen las siguientes condiciones:

- ▶ \mathbf{x}_0 es un punto silla hiperbólico con valores propios $\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0)$ para $\alpha = 0$.
- ▶ Existe una órbita homoclínica Γ_0 cuando $\alpha = 0$.
- (G) $\sigma := \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$.
- (T) $\frac{d\beta}{d\alpha}(0) \neq 0$, donde $\beta = \beta(\alpha)$ es la distancia entre las variedades estable e inestable de \mathbf{x}_0 como en la página 6. (En particular, $\beta(0) = 0$).

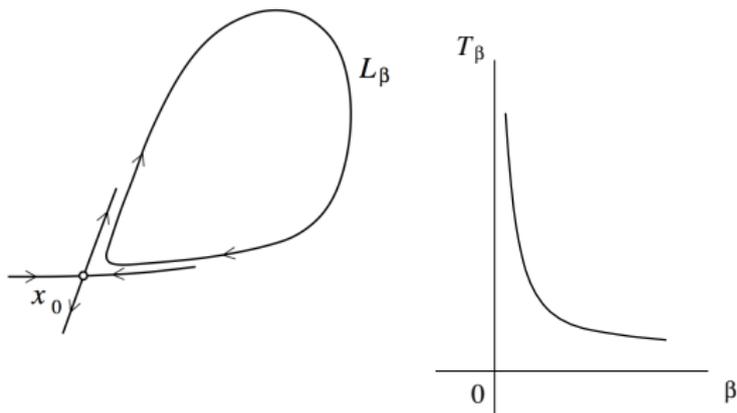
Entonces, un único ciclo límite L_β se bifurca para $\beta \neq 0$ (i.e., para $\alpha \neq 0$).

Además, el signo de σ determina la "dirección" de la bifurcación y la estabilidad del ciclo bifurcado:

si $\sigma < 0$, L_β es estable y existe para $\beta > 0$;

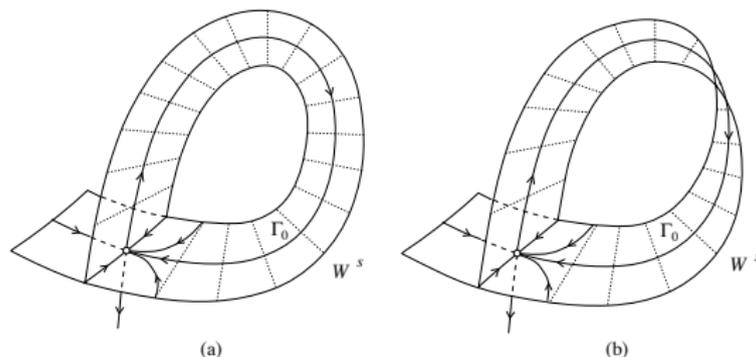
si $\sigma > 0$, L_β es inestable y existe para $\beta < 0$.

Periodo de un ciclo como función de β



- ▶ A medida que $|\beta| \rightarrow 0$, el ciclo pasa más y más cerca del punto silla y se vuelve más “angular”. Un punto en L_β cada vez se demora más en pasar cerca de x_0
- ▶ En el límite, $T_\beta \rightarrow \infty$ as $|\beta| \rightarrow 0$.
- ▶ Notemos que el ciclo límite existe estrictamente a un sólo lado de la bifurcación.

Orientabilidad de bifurcaciones homoclínicas



(G.1) $\sigma = \lambda^s + \lambda^u \neq 0$.

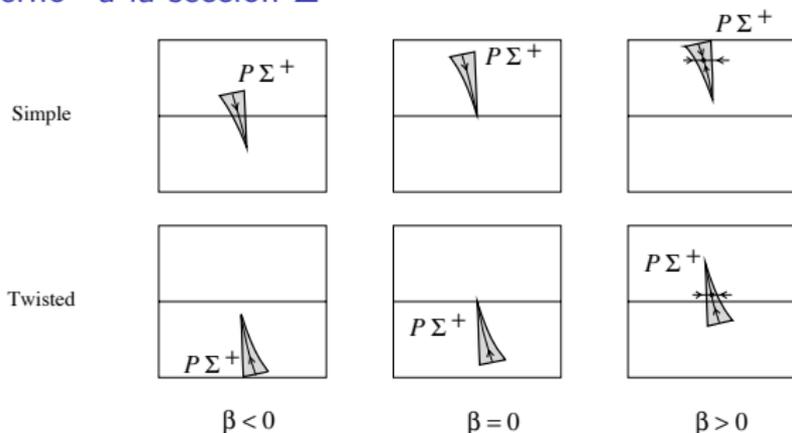
(G.2) Γ_0 converge a \mathbf{x}_0 tangente a \mathbf{v}^s (dirección estable débil).

(G.3) $W^s(\mathbf{x}_0)$ 'se cierra' a lo largo de $W^{ss}(\mathbf{x}_0)$.

Esto puede ocurrir de dos maneras: $W^s(\mathbf{x}_0)$ forma, o bien, un cilindro topológico o una cinta de Möbius.

- ▶ (a) bifurcación homoclínica orientable.
- ▶ (b) bifurcación homoclínica no-orientable.

Retorno del “cuerno” a la sección Σ



Según el signo de σ y la orientación de la órbita homoclínica, hay varios casos de posición relativa de $P(\Sigma^+)$ con respecto a Σ .

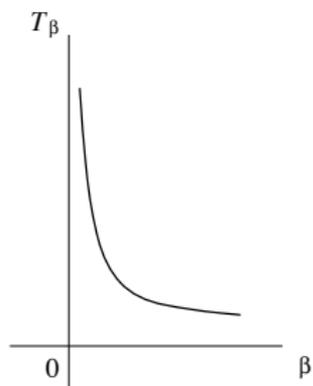
- ▶ Dado que el mapeo P actúa como una contracción a lo largo del eje x_3 , el análisis de puntos fijos se reduce al análisis de un mapeo unidimensional de la forma

$$x_1 \mapsto \beta + Ax_1 \frac{\lambda^u}{\lambda^s} + \dots,$$

que es similar al caso planar, pero ahora $A > 0$ (en el caso orientable) y $A < 0$ (caso no-orientable).

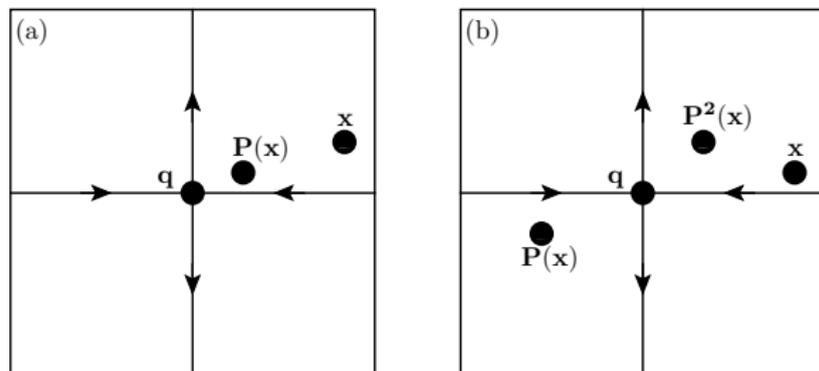
- ▶ De esta manera, si $\sigma < 0$, el mapeo P es una contracción en Σ^+ para $\beta > 0$ y luego posee un único punto fijo atractor en $P(\Sigma^+)$. (Como en la figura). Esto corresponde a un único ciclo estable para $\beta > 0$.
- ▶ Si $\sigma > 0$, el mapeo P contrae a lo largo del eje x_3 y expande a lo largo del “cuerno”. Por lo tanto, posee un único punto fijo silla en $P(\Sigma^+)$ para $\beta < 0$ o $\beta > 0$, dependiendo de la orientación de la órbita homoclínica. (Este caso no se muestra en la figura). Esto corresponde a un único ciclo de tipo silla.

Periodo del ciclo



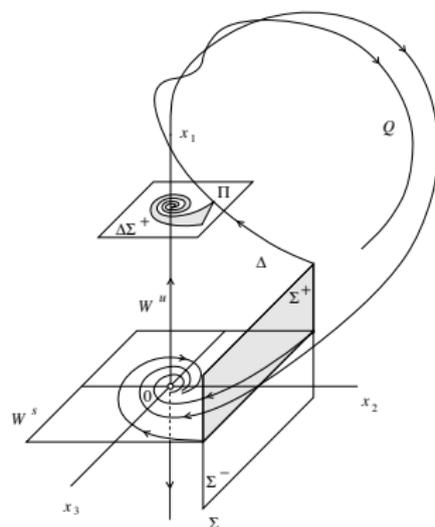
- ▶ Al igual que en el caso planar, $T_\beta \rightarrow \infty$ a medida que $\beta \rightarrow 0$.
- ▶ El ciclo existe estrictamente a un lado de la bifurcación.
- ▶ La órbita periódica bifurcada posee la misma orientación que la órbita homoclínica.

Órbitas periódicas (no)orientables



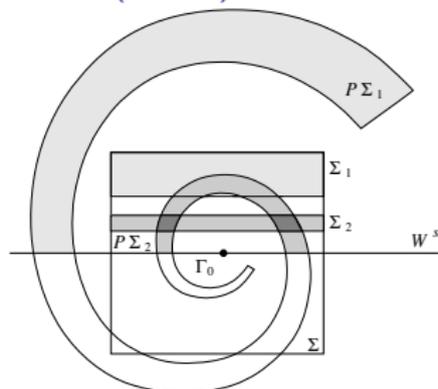
- ▶ Consideremos por ejemplo el caso de una órbita periódica Γ de tipo silla.
- ▶ Si $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es el mapeo de retorno de Poincaré, entonces $P(q) = q$.
- (a) Caso orientable: x y su primer retorno $P(x)$ están en el mismo lado.
El punto fijo q posee multiplicadores de Floquet positivos.
 $W^s(\Gamma)$ y $W^u(\Gamma)$ son variedades invariantes orientables.
- (b) Caso no-orientable: x y su primer retorno $P(x)$ están en lados opuestos.
Tan sólo al segundo retorno $P^2(x)$ volvemos al mismo lado de la partida.
El punto fijo q posee multiplicadores de Floquet negativos.
 $W^s(\Gamma)$ y $W^u(\Gamma)$ son variedades invariantes no-orientables.

Mapeo de Poincaré



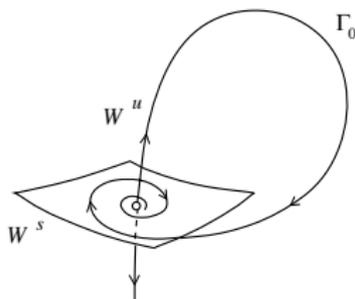
- ▶ Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el punto silla está en el origen. Además, existe un cambio de coordenadas suave e invertible que nos entrega una linealización local de las variedades invariantes de 0 , y de tal forma que $W^u(0)$ coincide (localmente) con el eje x_1 , y $W^s(0)$ coincide (localmente) con el plano (x_2, x_3) .
- ▶ Introducimos secciones Σ (transversal al flujo en $W^s(0)$, por ej., transversal al eje x_2 en las nuevas coordenadas) y Π (transversal a la dirección inestable, i.e., el eje x_1 en las nuevas coordenadas).
- ▶ Definimos un mapeo de Poincaré $P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$, $P = Q \circ \Delta$, donde
 $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ (mapeo local)
 $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ (mapeo global).

La imagen de la "serpiente" en Σ ($\sigma > 0$)



- ▶ Nuevamente, asumamos primero que $\beta = 0$ y consideremos la intersección de la "serpiente" $P(\Sigma^+)$ con Σ .
- ▶ El origen de la "serpiente" está en la intersección de Γ_0 con Σ . Esto corresponde a un punto fijo de P cuyo tiempo de retorno a Σ es "infinito".
- ▶ Dado que la "serpiente" se enrosca infinitas veces en torno a su origen, la intersección de Σ con $W^s(\mathbf{0})$ divide a la "serpiente" en un número infinito numerable de segmentos de espirales superiores e inferiores.
- ▶ Denotemos por $P(\Sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots$, a las semi-espirales superiores. (En la figura se muestran las dos primeras, $P(\Sigma_1)$ y $P(\Sigma_2)$).
- ▶ Las preimágenes Σ_i de las semi-espirales superiores son bandas horizontales en Σ^+ .
- ▶ Dado que $\sigma = \text{Re}\lambda_{1,2}^s + \lambda^u > 0$, la tasa de expansión es mayor que la tasa de contracción en una vecindad del origen. Luego, existe un $i_0 > 0$ tal que para $i = i_0, i_0 + 1, \dots$, la intersección $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ nunca es vacía y estará formada por dos componentes (En la figura, $i_0 = 2$).
- ▶ Cada una de estas intersecciones forma una herradura de Smale.
- ▶ Luego, esto nos da un número infinito de puntos fijos de tipo silla en Σ .
- ▶ Si hacemos $\beta \neq 0$, el punto fijo correspondiente a Γ_0 es desplazado desde la línea horizontal en Σ . Luego, un número finito de herraduras de Smale "sobrevive". Pero todavía nos dan un número infinito de puntos fijos silla para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño.

Teorema (silla-foco, $\sigma > 0$)



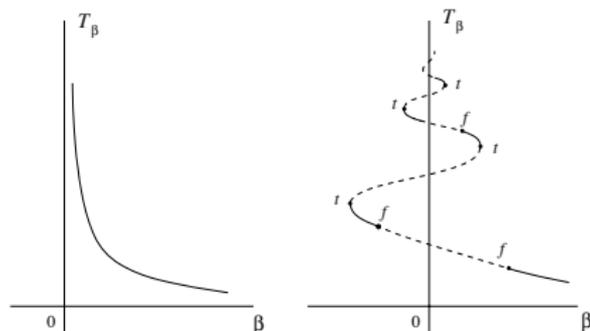
$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponga que se cumplen las siguientes condiciones:

- ▶ \mathbf{x}_0 es un punto silla-foco hiperbólico con valores propios $\lambda_{1,2}^s \in \mathbb{C}$, $\lambda^u > 0$ para $\alpha = 0$.
 - ▶ $\text{Re}\lambda_{1,2}^s < 0$, $\text{Im}\lambda_{1,2}^s \neq 0$.
 - ▶ Existe una órbita homoclínica $\Gamma_0 \subset W^s(\mathbf{0}) \cap W^u(\mathbf{0})$ cuando $\alpha = 0$.
- (G) $\sigma = \text{Re}\lambda_{1,2}^s + \lambda^u > 0$.
- (T) $\frac{d\beta}{d\alpha}(0) \neq 0$ donde $\beta = \beta(\alpha)$ es la distancia entre las variedades estable e inestable de \mathbf{x}_0 como en la página 6. (En particular, $\beta(0) = 0$).

Entonces, el sistema posee un conjunto invariante caótico (*caos de Shilnikov*) en una vecindad de U_0 de $\Gamma_0 \cup \mathbf{x}_0$ para $\beta = 0$. El conjunto caótico contiene una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas de tipo silla. Para $|\beta| \neq 0$ suficientemente pequeño, la dinámica caótica persiste, y el sistema sigue teniendo una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas de tipo silla.

La bifurcación homoclínica de Shilnikov emerge como la bifurcación de codimensión-uno de campos vectoriales más simple capaz de producir caos!

Bifurcaciones adicionales de órbitas periódicas



- (a) $\sigma < 0$: Órbita periódica estable existe a un lado de la bifurcación. No hay bifurcaciones adicionales.
- (b) $\sigma > 0$: Curva de bifurcación “zigzaguea” alrededor de $\beta = 0$.
 - ▶ El período T_β de los ciclos de esta rama tiende a infinito cuando $\beta \rightarrow 0$, indicando la existencia de una órbita homoclínica en el límite cuando $\beta = 0$.
 - ▶ En cada doblez de esta curva ocurre una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas: A medida que $\beta \rightarrow 0$, los ciclos se van creando de a pares, uno estable (línea continua) y uno silla (línea discontinua).
 - ▶ A su vez, los ciclos estables pierden estabilidad en bifurcaciones de duplicación de período. (Así, aparecen infinitos ciclos del doble de período no incluidos en esta rama de curva de bifurcación).
 - ▶ De esta forma, en el límite, cuando $\beta \rightarrow 0$, existe una cantidad infinita numerable de ciclos de tipo silla.
 - ▶ Además, pueden ocurrir bifurcaciones n -homoclínicas para $|\beta| \neq 0$ suficientemente pequeño: Existencia de órbitas homoclínicas que se cierran después de $n - 1$ “intentos.” Por cada una de estas órbitas homoclínicas secundarias uno obtiene el mismo escenario de herraduras y caos que en la bifurcación principal!

Bibliografía

- ▶ Yu. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, 2004.
- ▶ J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.
- ▶ Yu. Ilyashenko and W. Li, *Nonlocal Bifurcations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 66, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- ▶ A. J. Homburg and B. Sandstede, *Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields*, in *Handbook of Dynamical Systems*, Volume 3, H. Broer, F. Takens and B. Hasselblatt (eds.), Elsevier, 2010, pp. 379–524.
- ▶ L. P. Shilnikov, *On a new type of bifurcation of multidimensional dynamical systems*, *Sov. Math. Dokl.*, **10** (1969), pp. 91–102.
- ▶ L. P. Shilnikov, *A case of the existence of a countable number of periodic orbits*, *Sov. Math. Dokl.*, **6** (1965), 163–166.
- ▶ L. P. Shilnikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough state to a saddle-focus type*, *Math. USSR-Sb.*, **10** (1970), 91–102.
- ▶ P. Gaspard, R. Kapral and G. Nicolis, *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: A two-parameter analysis*, *J. Statist. Phys.*, **35** (1984), 697–727.
- ▶ P. Glendinning and C. Sparrow, *Local and global behavior near homoclinic orbits*, *J. Statist. Phys.*, **35** (1984), 645–696.