UTFSM - Primer semestre 2017
Condiciones de genericidad y transversalidad de bifurcaciones locales genéricas
Profesor: Pablo Aguirre

1 Bifurcaciones de puntos de equilibrio.

Sea $\dot{x} = f(x,\alpha)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y f suave en (x,α). Suponga que la bifurcación ocurre en el equilibrio x_0 cuando $\alpha = \alpha^*$. Sean $\lambda_1(\alpha), \dots, \lambda_n(\alpha)$ los valores propios de $Df(x_0,\alpha)$.

1. **Bifurcación fold ($n = 1$):**
   (a) Condiciones de no-degeneración: $f_{xx}(x_0,\alpha^*) \neq 0$, $f_\alpha(x_0,\alpha^*) \neq 0$.
   (b) Forma normal topológica: $\dot{y} = \beta \pm y^2$.
2. **Bifurcación de Hopf ($n = 2$):**
   (a) Condiciones de no-degeneración: $l_1(\alpha^*) \neq 0$, $\mu'(\alpha^*) \neq 0$, donde $l_1(\alpha)$ es el primer coeficiente de Lyapunov, y $\mu(\alpha) = \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha))$.
   (b) Forma normal topológica:
$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2 Bifurcaciones de puntos fijos.

Sea $x \mapsto f(x,\alpha)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y f suave en (x,α). Suponga que la bifurcación ocurre en el punto fijo x_0 cuando $\alpha = \alpha^*$. Sean $\lambda_1(\alpha), \dots, \lambda_n(\alpha)$ los valores propios de $Df(x_0,\alpha)$.

1. **Bifurcación fold ($n = 1$):**
   (a) Condiciones de no-degeneración: $f_{xx}(x_0,\alpha^*) \neq 0$, $f_\alpha(x_0,\alpha^*) \neq 0$.
   (b) Forma normal topológica: $y \mapsto \beta + y \pm y^2$.
2. **Bifurcación flip ($n = 1$):**
   (a) Condiciones de no-degeneración: $\frac{1}{2}\big(f_{xx}(x_0,\alpha^*)\big)^2 + \frac{1}{3} f_{xxx}(x_0,\alpha^*) \neq 0$, $f_{x\alpha}(x_0,\alpha^*) \neq 0$.
   (b) Forma normal topológica: $y \mapsto -(1+\beta)y \pm y^3$.
3. **Bifurcación Neimark-Sacker ($n = 2$):**
   (a) Condiciones de no-degeneración: $r'(\alpha^*) \neq 0$, $\exp(ik\theta_0) \neq 1$, para $k = 1,2,3,4$; donde $\lambda_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)\exp(\pm i\varphi(\alpha))$ y $\varphi(\alpha^*) = \theta_0$.
   (b) "Forma normal" topológica:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (1+\beta) \begin{pmatrix} \cos\theta(\beta) & -\sin\theta(\beta) \\ \sin\theta(\beta) & \cos\theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2+y_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta(\beta) & -\sin\theta(\beta) \\ \sin\theta(\beta) & \cos\theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & d(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(||y||^4),$$
   con $d(0) \neq 0$.