UTFSM - Primer Semestre 2017
Certamen 2 - Teoría de Bifurcaciones

__Instrucciones:__
- **Este certamen consta de cuatro preguntas. Debe responder solamente tres de ellas.**
- **Justifique todas sus respuestas y redáctelas de la forma más clara posible.**
- **Tiempo: 180 minutos.**

1.- (33 pts.) Considere una familia de sistemas dinámicos continuos en $\mathbb{R}^n$, dependiendo de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, que posee una órbita periódica γ_μ para cada μ. Sea

$$P_\mu : \Sigma \to \Sigma$$

la aplicación de retorno de Poincaré asociada a γ_μ, definida en una sección transversal $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, para $|\mu|$ suficientemente pequeño. Suponga que en $\mu = 0$ el punto fijo de P_0 tiene los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $|\lambda_j| < 1$, con $-1 < \mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ para todo $j = 2, \ldots, n-1$; y por lo tanto, el punto fijo de P_0 es no-hiperbólico. Suponga que la restricción de P_μ a una variedad central W^c_{loc} 1-dimensional tiene la forma

$$P^c_\mu : x \mapsto -(1+\mu)x - x^3, \quad x \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \mu \approx 0.$$

(a) Investigue las bifurcaciones de P^c_μ para μ suficientemente cerca de $\mu = 0$ y dibuje el diagrama de bifurcación de P^c_μ en el espacio (μ, x).

(b) Escriba en forma explícita un sistema discreto $(n-1)$-dimensional que sea conjugado a la aplicación de retorno de Poincaré P_μ.

(c) En el caso $n = 3$, dibuje los posibles retratos de fase del **sistema continuo** para $\mu < 0$, $\mu = 0$, y $\mu > 0$. Identifique la estabilidad (atractor, repulsor, silla) de los ciclos presentes en cada caso.

2.- (33 pts.) La curva $\Gamma_0 = \{y = \pm\, x\sqrt{1-x},\ z = 0, \text{ con } x \in (0,1]\}$ es una órbita homoclínica al origen del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y + x^2, \\ \dot{y} &= 2x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy, \\ \dot{z} &= -5z. \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es el número máximo posible de órbitas periódicas que pueden nacer desde este loop homoclínico en bifurcaciones genéricas del sistema?

(b) Considere ahora el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - 2y - x^2, \\ \dot{y} &= -2x + y + 3x^2 - \frac{3}{2}xy, \\ \dot{z} &= -z. \end{cases}$$

¿Cuál es el número máximo posible de órbitas periódicas que pueden nacer desde bifurcaciones globales del sistema? *Ayuda*: Piense en pequeñas perturbaciones en la parte lineal del sistema.

3.- (33 pts.) Considere un sistema dinámico continuo $\dot{x} = f(x, \alpha)$ en $\mathbb{R}^3$ definido por un campo de vectores de clase C^r en (x, α), $r \geq 1$. Suponga que para $\alpha = 0$ el sistema posee dos órbitas periódicas hiperbólicas γ_1 y γ_2 de tipo silla. Además, asuma que existe un ciclo heteroclínico formado por dos conexiones heteroclínicas transversales Γ_1 y Γ_2 formando un loop *PtoP* entre γ_1 y γ_2.

(a) Explique cómo el ciclo heteroclínico se manifiesta a nivel de la aplicación de retorno de Poincaré en una sección transversal a γ_1 y γ_2. ¿Qué consecuencias se tienen para la dinámica? *Sugerencia*: Considere las variedades invariantes de los puntos fijos del mapeo de Poincaré.

(b) Dé un argumento suficientemente claro de por qué existe un número infinito de órbitas periódicas de tipo silla cerca del ciclo heteroclínico en $\mathbb{R}^3$ para $\alpha = 0$.

(c) ¿Cuál es el número máximo de órbitas periódicas que "sobreviven" para $\alpha \neq 0$ suficientemente pequeño?

4.- (33 pts.) Considere la ecuación en recurrencia $x_{k+1} = r x_k (1 - x_{k-1}) + \epsilon$, la cual puede ser reescrita en forma equivalente como el sistema discreto bidimensional

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx(1-y) + \epsilon \\ x \end{pmatrix}$$

donde $r > 1$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Verifique que existe un punto fijo no-trivial en las coordenadas

$$x^* = y^* = \frac{-1 + r + \sqrt{A}}{2r},$$

donde $A = r^2 + r(4\epsilon - 2) + 1$.

(b) Verifique para $\epsilon = 0$, los valores propios asociados al punto fijo (x^*, y^*) son $\lambda_{1,2}(r, 0) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5 - 4r}\right)$. Concluya que el sistema pasa por una bifurcación Neimark-Sacker para $(r, \epsilon) = (2, 0)$ en el punto (x^*, y^*).

(c) Escriba los valores propios $\lambda_{1,2}(2, 0)$ en su forma polar $e^{i2\pi k}$, para un cierto $k \in \mathbb{R}$ apropiado. ¿Es este k un número racional o irracional?

(d) Para $\epsilon \neq 0$ los valores propios del punto fijo (x^*, y^*) toman la forma

$$\lambda_{1,2}(r, \epsilon) = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{A} + r \pm \sqrt{A + (r-3)^2 - 2\,(5 + r)\sqrt{A}}\right).$$

Pruebe que la relación $r = \frac{2}{1+\epsilon}$ define una curva de bifurcación Neimark-Sacker en una región del plano (r, ϵ). Haga un bosquejo de esta curva cerca del punto $(r, \epsilon) = (2, 0)$.

(e) Suponga que esta bifurcación Neimark-Sacker es supercrítica (se puede probar, pero no es necesario hacerlo). Sin calcularlas directamente, argumente e identifique posibles regiones (y sus fronteras) en el plano (r, ϵ) **cerca de** $(2, 0)$ en que hay dinámica periódica, cuasiperiódica, ninguna de las anteriores, etc.