UTFSM - Primer Semestre 2017
Certamen 1 - Teoría de Bifurcaciones

<u>**Instrucciones:**</u>
- **Justifique todas sus respuestas y redáctelas de la forma más clara posible.**
- **Tiempo: 180 minutos.**

1.- (25 pts.) Considere el sistema dinámico continuo cúbico

$$\dot{x} = \alpha + \beta x - x^3,$$

con $x \in \mathbb{R}$, que depende de dos parámetros reales α y β.

(a) Demuestre que el (único) conjunto de bifurcación local en el plano (α, β) viene dado por la curva $\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) \,|\, 4\beta^3 = 27\alpha^2\}$.

(b) Haga un bosquejo de la curva $\mathcal{B}$ y determine el diagrama de bifurcación del sistema en una vecindad de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

(c) Determine la codimensión de la bifurcación respectiva para cada punto $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

2.- (25 pts.) Considere el campo de vectores en $\mathbb{R}^2$

$$X : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{02}y^2 + \mathcal{O}\big(|(x,y)|^3\big), \\ \dot{y} & = & x + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{02}y^2 + \mathcal{O}\big(|(x,y)|^3\big), \end{array} \right.$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestre que el sistema no posee términos resonantes de grado 2 y que existe un cambio de coordenadas que transforma el campo de vectores X en la siguiente Forma Normal hasta términos **cuadráticos**:

$$\tilde{X} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & -v + \mathcal{O}\big(|(u,v)|^3\big), \\ \dot{v} & = & u + \mathcal{O}\big(|(u,v)|^3\big). \end{array} \right.$$

(b) Sin hacer cálculos adicionales, escriba una posible Forma Normal para X hasta términos **cúbicos**. Argumente su respuesta y justifique cualquier hipótesis adicional que crea necesaria.

3.- (25 pts.) Sea la familia de difeomorfismos de clase C^∞, a un parámetro,

$$x \mapsto f(x,\mu), \qquad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R},$$

para los cuales existe un punto fijo en $x = 0$ para todo μ, es decir, $f(0,\mu) \equiv 0$. Suponga que el valor propio de la linealización de f en $x = 0$, $\lambda(\mu)$, es tal que $\lambda(0) = 1$ y $\lambda'(0) = \frac{d\lambda}{d\mu}|_{\mu=0} > 0$. Además, suponga que $f_{xx}(0,0) > 0$.

(a) Demuestre que una expansión de f en torno a $x = 0$ de la forma

$$f(x,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\mu) x^j$$

satisface (i) $a_0(\mu) \equiv 0$; (ii) $a_1(\mu) = 1 + \mu f_{\mu x}(0,0) + \mathcal{O}(\mu^2)$; y (iii) $a_2(0) > 0$.

(b) Demuestre que la ecuación de la variedad de puntos fijos en el espacio (μ, x) posee una solución **no-trivial** $x = x^*(\mu)$ para $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, y obtenga que

$$\frac{dx^*}{d\mu}(0) = \frac{-2 f_{\mu x}(0,0)}{f_{xx}(0,0)} < 0.$$

(c) Determine la estabilidad del punto fijo $x = 0$ para todo $|\mu|$ suficientemente pequeño.

(d) Determine la estabilidad del punto fijo $x = x^*(\mu)$ para todo $|\mu|$ suficientemente pequeño.

(e) Haga un bosquejo del diagrama de bifurcación en el plano (μ, x).

4.- (25 pts.) Considere el sistema planar

$$X : \begin{cases} \dot{x} &= \mu + xy^3 - x^2, \\ \dot{y} &= \frac{1}{2} y - x^2, \end{cases}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Verifique que el origen $(x,y) = (0,0)$ es un equilibrio no-hiperbólico de X para un cierto $\mu = \mu^*$ por determinar.

(b) Encuentre la familia de variedades centrales W^c_μ asociadas.

(c) Determine el sistema **reducido** $X^c := X|_{W^c_\mu}$ (la restricción de X a W^c_μ) y determine los posibles retratos de fase de X^c para $|\mu - \mu^*|$ pequeño.

(d) Haga un **bosquejo cualitativo** del diagrama de bifurcación del sistema **completo** X.