UTFSM - Segundo semestre 2013
MAT-244 – Aplicaciones de la Matemática
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 2

1. La ecuación relativista para la órbita de un planeta alrededor del sol es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha + \epsilon u^2,$$

donde $u = 1/r$, y (r, θ) son las coordenadas polares del planeta en su plano de movimiento. El parámetro α es pequeño y se puede determinar explícitamente de la mecánica Newtoniana clásica; el término ϵu^2 es la correción de Einstein. Aquí, ϵ es un parámetro positivo muy pequeño.

(a) Reescriba la ecuación como un sistema en el plano de fase (u, v), donde $v = du/d\theta$.
(b) Encuentre todos los puntos de equilibrio del sistema.
(c) Muestre que uno de los puntos de equilibrio es un centro en la linealización del sistema. ¿Es un centro no-lineal? *Sugerencia:* Puede usar herramientas analíticas y computacionales.
(d) Muestre que el punto de equilibrio hallado en (c) corresponde a una órbita planetaria circular.

2. Considere un planeador volando a una velocidad v en un ángulo θ con la horizontal. Su movimiento está gobernado aproximadamente por las ecuaciones adimensionales

$$\begin{cases} \dot{v} &= -\sin\theta - Dv^2 \\ v\,\dot{\theta} &= -\cos\theta + v^2 \end{cases}$$

donde los términos trigonométricos representan los efectos de la gravedad y los términos v^2 representan los efectos aerodinámicos de arrastre (drag) y sustentación (lift).

(a) Suponga que no hay arrastre ($D = 0$). Muestre que $E(v, \theta) = v^3 - 3v\cos\theta$ es una cantidad conservada. Bosqueje el retrato de fase en este caso. Interprete sus resultados físicamente. ¿Cómo luce la trayectoria de vuelo del planeador?
(b) Investigue el caso de arrastre positivo ($D > 0$).

Sugerencia: Nuevamente, combine herramientas analíticas y computacionales.

Fecha de entrega: Lunes 11 de Noviembre.