

TAREA 1

1. Las rayas de las cebras y los patrones en las alas de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Como un ingrediente en un modelo de formación de patrones, Lewis et al. (1977) consideraron un ejemplo simple de un *interruptor químico*, en el cual un gen G es activado por una sustancia S mediante una señal bioquímica. Por ejemplo, el gen normalmente estaría inactivo, pero podría “encenderse” para producir un pigmento u otro producto cuando la concentración S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del gen, y asuma que la concentración s_0 de S está fija. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4 + g^2},$$

donde las constantes k_i son positivas. La producción de g es estimulada por s_0 a una tasa k_1 , y por un proceso de retroalimentación positivo o *autocatalítico* (el término no-lineal). También hay una degradación lineal de g a una tasa k_2 .

- (a) Demuestre que el sistema se puede llevar a la forma adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - r x + \frac{x^2}{1 + x^2},$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son nuevos parámetros.

- (b) Demuestre que si $s = 0$, existen dos puntos de equilibrio positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c es un valor a determinar.
- (c) Asuma que inicialmente no hay producción del gen, es decir, $g(0) = 0$, y suponga que s crece lentamente desde cero (se enciende la señal activadora). ¿Qué le sucede a $g(t)$? ¿Qué sucede si s entonces vuelve a cero? ¿El gen se vuelve a apagar?
- (d) Encuentre las ecuaciones para las curvas de bifurcación en el plano (r, s) , y clasifique las bifurcaciones que ocurren.
- (e) Mediante un computador, grafique el diagrama de bifurcación en el plano (r, s) .

Fecha de entrega: Lunes 14 de Octubre.