UTFSM - Segundo semestre 2013
MAT-244 – Aplicaciones de la Matemática
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Considere el modelo de Fitzhugh de impulsos nerviosos en neuronas (visto en clases):

$$\begin{cases} \dot{x} &=& c\left(y + x - \dfrac{x^3}{3} + z(t)\right), \\ \\ \dot{y} &=& -\dfrac{x - a + by}{c}. \end{cases}$$

   (a) Verifique que el Jacobiano del sistema viene dado por
   $$J(x,y) = \begin{pmatrix} (1-x^2)c & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}.$$
   (b) Verifique que un punto de equilibrio (x_*, y_*) es estable si $-\left(\frac{b}{c} - (1-x_*^2)c\right) < 0$ y $1-(1-x_*^2))b > 0$.
   (c) Muestre que el estado de equilibrio del modelo de Fitzhugh es estable si cae en el rango $-\gamma \leq x_* \leq \gamma$, donde $\gamma = \sqrt{1 - b/c^2}$ y $b < 1$, $b < c^2$.
   (d) ¿En qué ubicación de la isoclina cúbica queda la coordenada x_* bajo la condición en (c)?

2. Considere el siguiente modelo de un láser:

$$\begin{cases} \dot{n} &=& GnN - kn, \\ \dot{N} &=& -GnN - fN + p, \end{cases}$$

   donde $N(t)$ es el número de átomos excitados y $n(t)$ es el número de fotones emitidos por el láser. El parámetro G es el coeficiente de ganancia para emisiones estimuladas, k es la tasa de decaimiento debido a la pérdida de fotones, f es la tasa de decaimiento por emisión espontánea, y p es la fuerza de bombeo. Todos los parámetros son positivos, excepto p, que puede tener cualquier signo.

   (a) Encuentre una versión adimensional del sistema.
   (b) Encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio.
   (c) Haga un bosquejo de todos los posibles retratos de fase cualitativamente diferentes que ocurren a medida que varían los parámetros adimensionales.
   (d) Haga un gráfico del diagrama de estabilidad para el sistema. ¿Qué tipo de bifurcaciones ocurren?

3. Un método de control de pestes consiste en generar o introducir un número de insectos estériles en una población. Si la fracción de insectos que nacen estériles es γ, un modelo sugerido es:

$$\begin{cases} \dot{N} &=& \left(\dfrac{aN}{N+n} - b\right)N - kN(N+n), \\ \\ \dot{n} &=& \gamma N - bn, \end{cases}$$

donde $N(t)$ y $n(t)$ es el número de insectos fértiles e infértiles, respectivamente, y $a > b > 0$ y $k > 0$ son parámetros. En base a un análisis de bifurcación, determine las condiciones sobre γ para la erradicación de la peste.

4. Considere un modelo del tamaño poblacional $y(x,t)$ de una especie en un segmento de recta $0 \leq x \leq L$ que tenga un equilibrio atractor en $y = K$ cuando no hay difusión, y que sea descrito por la ecuación de reacción-difusión:
$$y_t = f(y) + Dy_{xx}$$
con condiciones de frontera
$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = 0.$$
   (a) Muestre que $f'(K) < 0$.
   (b) Muestre que la linealización del modelo en el equilibrio $y = K$ es
$$u_t = f'(K)u + Du_{xx}.$$
   (c) Busque soluciones estacionarias de la linealización.
   (d) Busque soluciones de la linealización de la forma
$$u(x,t) = e^{\sigma t}\cos(kx).$$
   Muestre que para cualquiera de estas soluciones la parte real de σ es negativa.

5. Considere el siguiente modelo poblacional adimensional con invasión o colonización territorial de una de las especies:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(u+v) + p[1-(u+v)], \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= (1-p)(u+v)[1-(u+v)]. \end{cases}$$
Busque soluciones de tipo onda viajera.

6. Una función de la forma $n(t,a) = e^{\gamma t}r(a)$ se dice una solución de similaridad del modelo poblacional con distribución de edad
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\mu(a)n$$
con condición de frontera
$$n(t,0) = \int_0^\infty \beta(a)n(t,a)da$$
si satisface la ecuación integral
$$\int_0^\infty \beta(a)\exp\left(-\gamma a - \int_0^a \mu(s)ds\right)da = 1.$$
Muestre que si la tasa de natalidad $\beta(a)$ es esencialmente cero (excepto en un rango muy estrecho cerca de algún valor $a_0 > 0$), la población se extinguirá sin importar cuál sea la tasa de mortalidad $\mu(a)$. ¿Qué se puede decir sobre la tasa de natalidad si hay una tasa de mortalidad alta y lineal en la edad, y tal que la población sobreviva?