UTFSM - Primer semestre 2015
MAT–225 - Análisis I
Profesor: Pablo Aguirre

TAREA 9H

1. Sea X un espacio Euclideano, no necesariamente completo, y sea X^* su completación. Defina operaciones lineales y el producto escalar en X^* mediante la "extensión continua" de aquellas operaciones en $X \subset X^*$. Más precisamente, si $x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y$ donde $x_n, y_n \in X$, sean

$$x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n), \quad \alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n, \quad \langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle.$$

Demuestre que:

(a) Estos límites existen y son independientes de la elección de las sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ en X convergiendo a x e y, respectivamente;

(b) X^* es también un espacio Euclideano.

Complete el espacio $X = C_2[a, b]$ de esta manera (donde $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$) y demuestre que el espacio resultante X^* es un espacio de Hilbert.

Comentario: Este espacio X^* se denota $L^2[a, b]$. Los elementos en $L^2[a, b] \setminus C_2[a, b]$ son también funciones, pero discontinuas, cuyos cuadrados son *Lebesgue-integrables* en $[a, b]$.

2. Demuestre que cada uno de los siguientes conjuntos es un subespacio del espacio de Hilbert l_2:

(a) $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2 : x_1 = x_2\}$;

(b) $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2 : x_n = 0, \forall n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$;

Determine $A^\perp$ y $B^\perp$.

3. Sean A, B subconjuntos no-vacíos de un espacio Euclideano X con $A \subset B$. Demuestre que: (a) $A \subset A^{\perp\perp}$; (b) $B^\perp \subset A^\perp$; (c) $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

4. Sea H un espacio de Hilbert y sea $M \subset H$ un subconjunto no-vacío. Demuestre que $M^{\perp\perp}$ es el subespacio más pequeño de H que contiene a M, es decir, $M^{\perp\perp}$ está contenido en cualquier subespacio $Y \subset H$ tal que $M \subset Y$.

No es necesario entregar esta tarea.