UTFSM - Primer semestre 2015
MAT–225 - Análisis I
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 8b

1. Sea X el conjunto de todas las funciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que

   (a) $f(t) \neq 0$ en a lo más una cantidad numerable de puntos $t_1, t_2, \ldots$;
   (b) $\sum_{i=1}^{\infty} f^2(t_i) < \infty$.

   Defina suma de elementos y multiplicación por escalares en la manera usual, es decir, $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$. Si $f, g \in X$ no se anulan solamente en los puntos $t_1, t_2, \ldots$ y $t'_1, t'_2, \ldots$, respectivamente, defina el producto de f y g por

   $$\langle f, g\rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} f(t_i)g(t'_j).$$

   Demuestre que este producto convierte a X en un espacio Euclideano. Demuestre que X no es separable.

2. Dé un ejemplo de un espacio Euclideano **no-separable** que no posea una base ortonormal. Pruebe que un espacio Euclideano completo (no necesariamente separable) siempre posee una base ortonormal.

3. Dado un espacio Euclideano X, sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots\}$ una base ortonormal de X y sea $f \in X$ un elemento arbitrario. Demuestre que el elemento

   $$f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

   es ortogonal a todas las combinaciones lineales de la forma

   $$\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k$$

   si y sólo si $a_k = \langle f, \varphi_k\rangle$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

No es necesario entregar esta tarea.