

UTFSM - Primer semestre 2015
MAT-225 - Análisis I
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 7

1. Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial X se dice *equivalente* a otra norma $\|\cdot\|_0$ en X si existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in X$ tenemos

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0.$$

Si $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$ son normas equivalentes en X , demuestre que las sucesiones de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ y $(X, \|\cdot\|_0)$ son las mismas.

2. Sea s el espacio vectorial de sucesiones reales finitamente no-nulas, es decir, $\{x_n\} \in s$ si y sólo si $x_n = 0$ excepto para un número finito de índices n . Demuestre que s no es un espacio de Banach bajo la norma $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. *Sugerencia:* Utilice el criterio de completitud en espacios normados.

3. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

converge uniformemente en todo intervalo acotado $[a, b]$ en \mathbb{R} siempre que $\alpha > 1/2$. ¿Se tiene la convergencia uniforme en todo \mathbb{R} ?

Fecha de entrega: Miércoles 13 de mayo en clases.