**UTFSM - Primer semestre 2015**
**MAT–225 - Análisis I**
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

# TAREA 4

1. Considere el espacio $l_\infty$ de todas las sucesiones *acotadas* de números reales $x = \{x_k\}$, con $|x_k| \leq C_x$, para todo $k = 1, 2, \ldots$, con la métrica
$$d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$
Demuestre que este espacio es completo.

2. Demuestre que el espacio $Y$ consistente de todas las funciones continuas $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con la métrica del máximo) tales que $x(a) = x(b)$ es completo.

3. Demuestre que si $(X, d)$ es completo, entonces la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ de bolas cerradas anidadas con radio $r_n \to 0$ consiste en un solo punto.

4. ¿Verdadero o Falso? Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y si $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, entonces $\{f(x_k)\}$ también es Cauchy. ¿Qué pasa si $f$ es estrictamente creciente? ¿Y si $f$ es Lipschitz?

5. Defina el operador $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ por
$$T[f](x) = \int_0^x f(t)dt.$$
Demuestre que $T$ no es una contracción, pero $T^2 = T \circ T$ sí lo es. ¿Cuál es el punto fijo de $T^2$?

**Fecha de entrega: Miércoles 15 de abril en clases.**