UTFSM - Primer semestre 2015

MAT–225 - Análisis I

PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 10F

1. Sea E un espacio normado. Demuestre que un funcional lineal f en E es continuo si y sólo si

   (a) Su kernel $\{x \in E : f(x) = 0\}$ es cerrado en E;

   (b) Existe un conjunto abierto $U \subset E$ y un número t tales que $t \notin f(U)$.

2. Demuestre que
$$f(x) = ax(0) + bx(1),$$
$$g(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^1 x(t)dt$$
son ambos funcionales lineales acotados en el espacio $C[0,1]$. Encuentre sus normas.

3. Sea f un funcional lineal definido sobre un espacio normado E. Suponga que para toda sucesión $\{x_n\} \in E$ tal que $x_n \to 0$, el conjunto $\{f(x_n)\}$ es acotado. Demuestre que $f \in E^*$.

4. En el espacio $E = C[-1,1]$ consideremos el conjunto
$$L = \left\{ x(t) \in C[-1,1] : \int_{-1}^0 x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt \right\}.$$

   (a) Demuestre que L es un subespecio de E y encuentre $f \in E^*$ tal que $L = Ker(f)$.

   (b) Demuestre que para cada $x(t) \in E$, con $x \notin L$, no existe un $y \in L$ tal que $\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x-y\|$.

5. Sean E un espacio normado y $\{f_n\}$ sucesión en E^*. Demuestre que f_n converge en E^* si y sólo si $\{f_n\}$ converge uniformemente en la bola $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

6. Sea E un esapcio normado y sea $x \in E$. Demuestre que
$$\|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|=1} |f(x)|.$$

7. Generalice en Teorema de Riesz (representación de funcionales en espacios de Hilbert) al caso de un espacio de Hilbert complejo.
Ayuda: Escriba $x_0 = \overline{f(y_0)}y_0$ en lugar de $x_0 = f(y_0)y_0$. El isomorfismo de H y H^* que asocia el funcional $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ con x_0 es entonces "lineal-conjugado" en el sentido de que $\overline{\alpha} f$ es asociado con αx_0.

No es necesario entregar esta tarea.